

LAPORAN PENELITIAN

Stability Analysis of Fixed Points in Forest Biomass Depletion Model



OLEH:

Vivi Ramdhani, M.Si

198804012020122012

Yolanda Rahmi Safitri, M.Si

199303252022032001

**FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN
UIN SJECH M DJAMIL DJAMBEK BUKITTINGGI**

2023

Abstract

Artikel ini memaparkan sebuah model pengurangan biomassa hutan (B) akibat populasi penduduk (N) dan tekanan populasi penduduk (P), serta dampak industrialisasi (I). Dalam artikel ini dilihat hubungan timbal balik antara biomassa hutan dengan pertumbuhan populasi penduduk serta industrialisasi. Dari model tersebut diperoleh 4 titik tetap tak negatif, yaitu E_1, E_2, E_3 dan E^* . Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan dari titik tetap model pengurangan biomassa hutan. Titik tetap E_1, E_2 , dan E_3 adalah jenis titik tetap saddle point dan bersifat takstabil. Sementara itu, titik tetap E^* adalah titik tetap stabil asimtotik lokal apabila memenuhi suatu kondisi tertentu. Pada tahap akhir dilakukan simulasi numerik terhadap titik keseimbangan model. Simulasi numerik ini memberikan hasil kestabilan biomassa sumber daya hutan mengalami penurunan seiring terjadinya peningkatan populasi dan tekanan populasi serta industrialisasi. Pertumbuhan populasi penduduk menyebabkan penurunan biomassa sumber daya hutan. Sebaliknya biomassa sumber daya hutan berpengaruh positif terhadap tingkat populasi penduduk. Oleh karena itu, diperlukan kontrol terhadap kepadatan populasi dan industrialisasi sebagai pengendalian terhadap pertumbuhan populasi dan untuk melindungi sumber daya hutan.

Kata Kunci : Kestabilan, Titik Tetap, Biomassa hutan, Populasi penduduk

Stability Analysis of Fixed Points in Forest Biomass Depletion Model

I. Pendahuluan

1.1 Latar Belakang Masalah

Hutan adalah bagian dari bumi yang berperan sebagai penjaga keseimbangan ekologi. Hutan berguna mengatur siklus pertukaran oksigen dan karbondioksida. Pohon yang ada di hutan mengeluarkan oksigen sehingga udara menjadi segar dan bersih serta menyerap karbondioksida kemudian menyimpannya dalam bentuk biomassa. Selain itu, hutan juga berfungsi sebagai tempat penyimpanan air, penyedia bahan baku industri, sumber bahan bakar, serta juga bisa menjadi tempat rekreasi.

Begitu banyak peranan hutan untuk mendukung kehidupan manusia berakibat terjadinya eksplorasi hutan. Untuk itu, diperlukan kesadaran manusia dalam menjaga lingkungan dan hutan. Eksplorasi yang tidak terkendali menyebabkan berkurangnya luas hutan, pembakaran hutan untuk dijadikan sebagai lahan perkebunan dan pemukiman mempercepat berkurangnya luas wilayah hutan. Hal ini terjadi pada negara-negara berkembang di mana berkurangnya hutan disebabkan karena kegiatan penduduk menggunakan hutan secara berlebihan untuk infrastruktur dan pengembangan industri (Dubey et al., 2009). Kerusakan hutan akibat populasi penduduk dan industrialisasi merupakan masalah serius yang dihadapi karena mengancam keseimbangan ekologi.

Perkembangan ilmu pemodelan matematika memberikan andil dalam menanggulangi masalah ekologi. Beberapa ahli sudah melakukan penelitian terkait dengan penipisan sumber daya hutan. Diantaranya Shukla et al. (1988) membahas model dampak populasi, polusi, dan industri pada penurunan biomassa sumber daya terbarui. Shukla et al. (1989) meneliti model dampak industri pada penipisan biomassa sumber daya hutan. Shukla dan Dubey (1997) mengkaji dampak populasi dan polusi pada penipisan sumber daya hutan. Selanjutnya, Dubey et al. (2003) membahas pengaruh industri dan polusi terhadap sumber daya hutan. Dubey et al. (2009) menganalisis model penipisan sumber daya hutan akibat populasi, tekanan populasi, dan industrialisasi.

Shukla et al. (2011) menganalisis model penipisan sumber daya terbarui akibat populasi dan industrialisasi serta dampak teknologi terhadap konservasi sumber daya terbarui. Ramdhani et al. (2015) memaparkan model penipisan sumber daya hutan dengan mempertimbangkan pengaruh penumpukan daerah industri terhadap biomassa sumber daya hutan. Selanjutnya Anggriani et al. (2018) menambahkan faktor laju pertumbuhan penduduk

akibat migrasi penduduk karena tersedianya industri pada model penipisan sumber daya hutan yang sebelumnya dibahas oleh Ramdhani et al (2015). Tahun 2017, terdapat hasil penelitian yang menyebutkan bahwa ada hubungan antara degradasi hutan yang disebabkan oleh kepadatan penduduk dan kepadatan industrialisasi (Sundar, 2017).

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Ramdhani, dkk dilakukan modifikasi model dengan melihat faktor penipisan biomassa hutan karena pengaruh kepadatan populasi penduduk serta mempertimbangkan faktor pertumbuhan populasi karena sumber daya biomassa hutan. Model tersebut juga mengacu pada penelitian Dubey et al. (2009) dan pada Shukla (2011). Permasalahan tersebut akan diformulasikan dalam bentuk model matematika taklinear dan setelah itu dilakukan dianalisis kestabilan sistemnya. Analisis kestabilan yang dilakukan dengan analisis kestabilan pada titik tetap model tersebut. Kemudian dilakukan simulasi numerik terhadap model sehingga terlihat perubahan sumber daya hutan akibat pengaruh kepadatan populasi. Selain itu, juga bisa dilihat dampak biomassa sumber daya hutan terhadap pertumbuhan populasi penduduk.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka permasalahan yang akan dianalisis adalah sebagai berikut :

- a. Bagaimana bentuk modifikasi model penipisan sumber daya hutan
- b. Bagaimana analisis kestabilan terhadap model hasil modifikasi
- c. Bagaimana pengaruh perubahan parameter terhadap kestabilan model

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memodifikasi model penipisan sumber daya hutan akibat populasi, tekanan populasi, dan industrialisasi.
2. Melakukan analisis kestabilan terhadap model hasil modifikasi.
3. Melakukan simulasi terhadap kestabilan model modifikasi dengan menggunakan program *Maple* dan melihat pengaruh perubahan parameter terhadap dinamika model.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat Penelitian ini adalah untuk

- a. Untuk melihat bagaimana model penipisan sumber daya hutan
- b. Mengetahui bentuk kestabilan model di setiap titik tetapnya
- c. Untuk mengetahui pengaruh perubahan parameter terhadap kestabilan model

2. Landasan Teori

2.1 Biomassa Sumber Daya Hutan

Biomassa adalah bahan organik yang dihasilkan dari proses fotosintesis pada tumbuhan. Kuantitas energi potensial dari proses fotosintesis yang diserap oleh tumbuhan digunakan untuk membentuk biomassa (White and Plaskett 1981). Jadi, hutan menyimpan CO₂ dalam bentuk biomassa dan humus. Biomassa hutan memiliki kandungan karbon yang cukup potensial karena hampir 50% biomassa hutan adalah berupa karbon. Apabila hutan terbakar maka unsur karbon terlepas ke lingkungan dalam bentuk karbondioksida (CO₂) yang akan mengganggu kestabilan lingkungan.

Keseimbangan biomassa hutan terganggu karena manusia melakukan eksploitasi tak terkendali. Degradasi dan deforestasi menyebabkan penipisan sumber daya hutan. Hanggumantoro (2007) menyebutkan degradasi hutan pada umumnya didefinisikan sebagai penurunan kerapatan pohon dan meningkatnya kerusakan pada hutan yang menyebabkan hilangnya hasil hutan dan hilangnya berbagai layanan ekologi yang berasal dari hutan. Sedangkan deforestasi adalah penebangan tutupan hutan (tegakan pohon) dan aktifitas konversi lainnya.

2.2 Populasi dan Tekanan Populasi Penduduk

Populasi penduduk adalah banyaknya penduduk persatuan luas lahan yang ditempati dalam kurung waktu tertentu. Penduduk sekitar hutan banyak yang memenuhi berbagai kebutuhan hidupnya seperti bahan makanan, pakaian, dan bahan bangunan dari dalam kawasan hutan. Tekanan populasi penduduk terhadap lahan merupakan perbandingan antara jumlah penduduk dengan luas lahan minimal untuk dapat hidup layak (Soemarwoto 1985). Prasetyo *et al.* (2009) menyebutkan bahwa semakin terhimpitnya keadaan ekonomi telah memicu terjadinya konversi lahan hutan untuk lahan pertanian atau penggunaan lahan lainnya. Bahkan sumber pendapatan alternatif yang paling umum diperoleh masyarakat sekitar hutan adalah melalui pengambilan sumber daya dari dalam kawasan hutan (Prasetyo *et al.* 2009).

Kejadian tersebut telah menyebabkan berkurangnya luas kawasan hutan dan degradasi hutan yang kemudian diperparah oleh adanya perambahan hutan, kebakaran hutan, dan aktivitas destruktif (perusakan) lainnya (Dwipayanti *et al.* 2009). Peneliti di banyak negara sepakat bahwa faktor yang menjadi penyebab kerusakan hutan, diantaranya pertumbuhan populasi (Entwistle *et al.* 2006), kebutuhan kayu bakar dan bahan bangunan (Hirsch 1987),

konversi lahan hutan untuk pertanian (Prasetyo *et al.*2009), kemiskinan, kurangnya pilihan alternatif ekonomi, dan lemahnya penegakan hukum (Horowitz 1997).

2.3 Industrialisasi

Dalam istilah ekonomi, industri adalah sektor ekonomi yang di dalamnya terdapat kegiatan produktif yang mengolah barang mentah menjadi barang setengah jadi atau barang jadi (Dumairy 1996). Industrialisasi adalah proses modernisasi ekonomi yang mencakup seluruh sektor ekonomi yang mempunyai kaitan satu sama lain dengan industri pengolahan. Industrialisasi bertujuan menaikkan nilai tambah seluruh sektor ekonomi dengan sektor industri pengolahan.

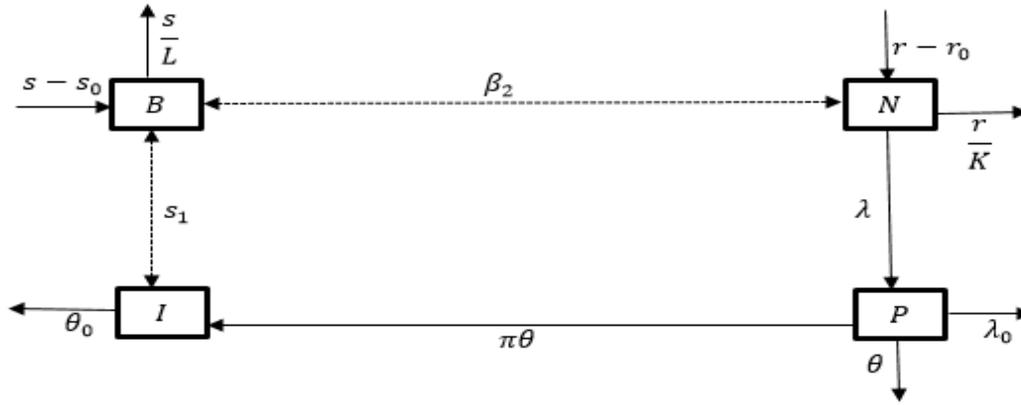
Meningkatnya industrialisasi dipengaruhi oleh pertumbuhan penduduk dan adanya tekanan populasi penduduk. Selain itu, daya dukung sumber daya hutan yang digunakan dalam proses industri juga turut memicu peningkatan industrialisasi. Hutan menyediakan bahan baku yang digunakan dalam industri pengolahan kayu, industri pembuatan kertas, dan lain sebagainya.

2.4 Model Dubey *et al.* (2009)

Dubey *et al.* (2009) telah mengajukan dan menganalisis sebuah model matematika tak linear untuk mempelajari penipisan sumber daya hutan akibat populasi dan tekanan populasi serta industrialisasi. Model tersebut terdiri dari empat variabel, yaitu kepadatan biomassa sumber daya hutan, kepadatan populasi, kepadatan tekanan populasi, dan kepadatan industrialisasi. Berikut ini dipaparkan beberapa asumsi yang digunakan dalam membangun model tersebut:

1. Populasi manusia dalam mengambil hasil hutan, seperti menebang kayu untuk bahan bakar, pakan tenak, dan membangun rumah, serta untuk perluasan lahan pertanian diasumsikan menjadi penyebab terjadinya penipisan sumber daya hutan.
2. Rata-rata pertumbuhan tekanan populasi sebanding dengan kepadatan populasi.
3. Rata-rata pertumbuhan kepadatan biomassa sumber daya hutan menipis akibat populasi dan industrialisasi.

Secara skematis, model penipisan sumber daya hutan yang dikemukakan oleh Dubey *et al.* (2009) dapat digambarkan pada diagram kompartemen di bawah ini:



Gambar 1 Skema model Dubey *et al.* (2009)

Berdasarkan uraian di atas, Dubey *et al.* (2009) telah menfomulasikan sebuah model penipisan sumber daya hutan akibat populasi, tekanan populasi, dan industrialisasi sebagai berikut:

$$\frac{dB}{dt} = s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B - s_0 B - \beta_2 N B - s_1 I B,$$

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - r_0 N + \beta_1 N B,$$

$$\frac{dP}{dt} = \lambda N - \lambda_0 P - \theta P, \tag{2.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \pi \theta P + \pi_1 s_1 I B - \theta_0 I,$$

$$N(0) = N_0 \geq 0, \quad B(0) = B_0 \geq 0, \quad P(0) = P_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \\ 0 \leq \pi \leq 1, 0 \leq \pi_1 \leq 1$$

dalam sistem (2.1), mana $B(t)$ adalah kepadatan biomassa sumber daya hutan, $N(t)$ adalah kepadatan populasi penduduk, $P(t)$ adalah kepadatan tekanan populasi penduduk, dan $I(t)$ adalah kepadatan industrialisasi. Berikut diberikan keterangan parameter yang digunakan pada sistem (2.1).

Tabel 2.1 Parameter model B. Dubey *et al.* (2009)

Notasi	Keterangan
s	koefisien tingkat pertumbuhan intrinsik biomassa sumber daya hutan
L	daya dukung biomassa sumber daya hutan
s_0	koefisien tingkat penipisan biomassa sumber daya hutan secara alami
r_0	koefisien tingkat kematian populasi secara alami
r	tingkat pertumbuhan intrinsik kepadatan populasi
K	daya dukung kepadatan populasi
β_1	tingkat pertumbuhan seluruh kepadatan populasi akibat sumber daya hutan
β_2	koefisien tingkat hubungan penipisan biomassa sumber daya hutan

	dengan kepadatan populasi
λ	koefisien tingkat pertumbuhan tekanan populasi
λ_0	koefisien tingkat pengurangan tekanan populasi secara alami
θ	koefisien tingkat pengurangan tekanan populasi akibat meningkatnya industrialisasi
s_1	koefisien tingkat penipisan kepadatan biomassa sumber daya hutan akibat industrialisasi
$\pi_1 s_1$	tingkat pertumbuhan industrialisasi akibat adanya sumber dayahutan
π	tingkat pertumbuhan industrialisasi karena tekanan populasi
θ_0	koefisien tingkat pengendali industrialisasi secara eksternal yang dilakukan pemerintah

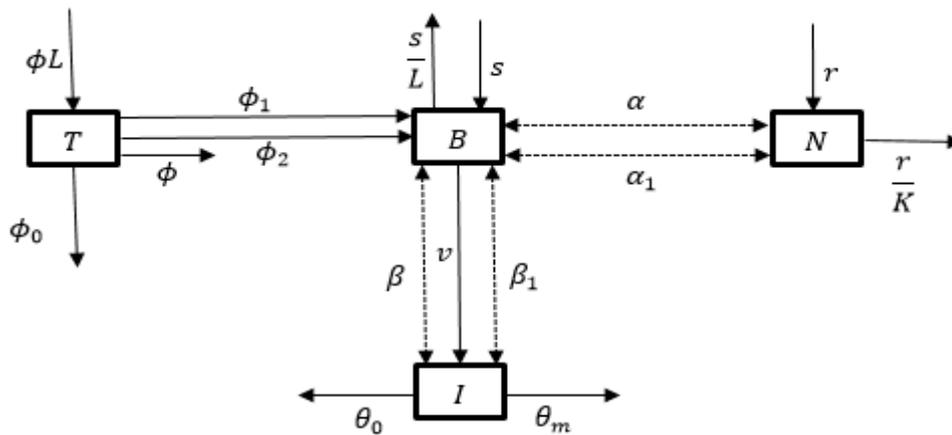
Sistem (2.1) telah dianalisis oleh Dubey *et al.* (2009) dan didapatkan kesimpulan bahwa keseimbangan kepadatan biomassa sumber daya hutan menurun akibat terjadinya peningkatan keseimbangan pada kepadatan populasi, tekanan populasi, dan industrialisasi. Ditemukan juga bahwa pertumbuhan penduduk (baik intrinsik atau dengan migrasi) apabila hanya sebagian bergantung pada sumber daya hutan dan terjadi peningkatan yang besar pada industrialisasi akan menyebabkan biomassa sumber daya hutan menjadi punah. Untuk itu, diperlukan kontrol untuk menjaga kestabilan ekologi.

2.5 Model Shukla *et al.* (2011)

Sebuah model matematika tak linear telah dianalisis oleh Shukla *et al.* (2011) untuk mengamati penipisan sumber daya terbarui oleh populasi dan industrialisasi dengan mempertimbangkan migrasi yang bergantung pada sumber daya tersebut. Selain itu, juga dipertimbangkan upaya teknologi pada perlindungan sumber daya terbarui. Model tersebut terdiri dari empat variabel, yaitu kepadatan sumber daya terbarui, kepadatan populasi, kepadatan industrialisasi, dan upaya teknologi. Ada beberapa asumsi yang digunakan pada model Shukla *et al.* (2011), yaitu sebagai berikut:

1. Kepadatan biomassa sumber daya terbarui dan kepadatan populasi dibangun oleh persamaan logistik.
2. Terjadinya penipisan pada kepadatan biomassa sumber daya terbarui diasumsikan sebagai akibat dari kepadatan populasi dan industrialisasi.
3. Kepadatan populasi dan industrialisasi meningkat akibat meningkatnya kepadatan sumber daya terbarui.
4. Rata-rata pertumbuhan upaya teknologi diasumsikan sebanding dengan biomassa sumber daya terbarui.

Pola penipisan sumber daya terbarui akibat populasi dan industrialisasi serta efek upaya teknologi dapat dilihat pada diagram kompartemen berikut:



Gambar 2 Skema model Shukla *et al.* (2011)

Berdasarkan penjelasan di atas, model penipisan sumber daya terbarui akibat populasi dan industrialisasi serta pengaruh teknologi terhadap perlindungan sumber daya terbarui yang telah diformulasikan oleh Shukla *et al.* (2011) dapat dilihat seperti di bawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= s \left(1 - \frac{B}{L} \right) B - \alpha NB - \alpha_1 B^2 N - \beta BI - \beta_1 B^2 I + \phi_1 BT + \phi_2 B^2 T \\ \frac{dN}{dt} &= r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N + \pi \alpha NB + \pi_1 \alpha_1 B^2 N, \\ \frac{dI}{dt} &= vB + \theta \beta BI + \theta_1 \beta_1 B^2 I - \theta_0 I - \theta_m I^2, \\ \frac{dT}{dt} &= \phi(L - B) - \phi_0 T, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$N(0) = N_0 \geq 0, \quad B(0) = B_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad T(0) = T_0 \geq 0,$$

di mana B adalah kepadatan biomassa sumber daya terbarui, N adalah kepadatan populasi penduduk, I adalah kepadatan industrialisasi, dan T adalah upaya teknologi yang diaplikasikan untuk melindungi sumber daya terbarui. Adapun parameter yang terdapat pada sistem (2.2) dapat dilihat dari tabel 2.2 berikut ini.

Tabel 2.2 Parameter model Shukla *et al.* (2011)

Notasi	Keterangan
α	koefisien tingkat penipisan biomassa sumber daya terbarui akibat populasi
α_1	koefisien tingkat penipisan biomassa sumber daya terbarui akibat

	penumpukan populasi
β	koefisien tingkat penipisan biomassa sumber daya terbaruai akibat industrialisasi
β_1	koefisien penipisan biomassa sumber daya terbaruai akibat penumpukan daerah industri
ϕ_1, ϕ_2	koefisien tingkat pertumbuhan biomassa sumber daya terbaruai akibat upaya teknologi)
θ, π	konstanta proporsional
π_1	koefisien tingkat pertumbuhan kepadatan populasi akibat biomassa sumber daya terbaruai
ν	koefisien tingkat pertumbuhan industrialisasi akibat migrasi industri
θ_0	koefisien tingkat berkurangnya kepadatan industrialisasi
ϕ	koefisien tingkat pertumbuhan upaya teknologi
ϕ_0	Koefisien tingkat berkurangan upaya teknologi
θ_1	rata-rata pertumbuhan industri akibat interaksi industri dengan biomassa sumber daya terbaruai
$\frac{1}{\theta_m}$	Kapasitas pembawa efisiensi industrialisasi

Sistem (2.2) telah dianalisis oleh Shukla *et al.* (2011). Hasil penelitiannya menyimpulkan bahwa kepadatan biomassa sumber daya terbaruai menurun akibat meningkatnya kepadatan populasi dan industrialisasi. Hal ini dipengaruhi juga akibat terjadinya peningkatan migrasi industri. Akan tetapi, sumber daya terbaruai tidak akan punah apabila dilakukan berbagai upaya aplikasi teknologi untuk melindunginya.

2.6 Sistem Persamaan Diferensial Biasa dan Pelinearan

Misalkan terdapat suatu model dinamika dengan n buah variabel tak bebas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dinyatakan dengan n buah persamaan diferensial biasa yang bergantung pada waktu t , maka sistem persamaan diferensial tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Misalkan suatu sistem persamaan diferensial biasa dinyatakan dalam bentuk

$$f(t, x) = \dot{x} \quad (2.3)$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial (2.3) disebut sistem persamaan diferensial biasa tak linear.

2.7 Titik Tetap dan Pelinearan

Misalkan diberi sistem persamaan diferensial tak linear sebagai berikut

$$f(t, x) = \dot{x} \quad (2.4)$$

Titik x^* disebut titik tetap atau titik keseimbangan jika $f(x^*) = 0$ (Tu 1994). Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tak linear persamaan (2.4) dilakukan dengan pelinearan pada fungsi $f(t, x)$. Melalui penggunaan ekspansi Taylor di sekitar titik tetap x^* , maka persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi

$$\dot{x} = Jx + \varphi(x) \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) adalah sistem persamaan diferensial tak linear dengan

$$J = D f(x^*) = D f(x)|_{x=x^*}$$

atau

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

dan $\varphi(x)$ suku berorde tinggi yang bersifat $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Selanjutnya Jx pada persamaan (2.5) disebut sebagai pelinearan dari sistem persamaan diferensial tak linear (2.4).

2.8 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan matriks A berukuran $n \times n$, maka suatu vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika untuk suatu skalar λ berlaku

$$Ax = \lambda x \quad (2.6)$$

dan vektor x disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks A , maka persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (2.7)$$

dengan I adalah matriks identitas. Persamaan (2.7) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Anton dan Rorres 1995).

2.9 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Misal diberikan matriks Jacobian J dari sistem persamaan diferensial tak linier (2.4) dengan nilai eigen $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ diperoleh dari $\det(J - \lambda I) = 0$. Secara umum kestabilan titik tetap mempunyai perilaku sebagai berikut:

1. Stabil, jika:
 - a. Setiap nilai eigen real negatif ($\lambda_i < 0$ untuk setiap i), atau
 - b. Setiap nilai eigen kompleks yang memiliki bagian real negatif atau sama dengan nol ($Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap i).
2. Takstabil, jika:
 - a. Terdapat nilai eigen real positif atau sama dengan nol ($\lambda_i \geq 0$ untuk setiap i), atau
 - a. Terdapat nilai eigen kompleks yang memiliki bagian real positif, yaitu ($Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap i) (Tu 1994)

Di samping itu, titik tetap dikatakan *saddle point* dan bersifat tak stabil apabila nilai eigen dari λ_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ memiliki tanda yang berbeda (Murray 1993). Manifold terbagi dua jenis yaitu *saddle manifold* stabil dan *saddle manifold* tidak stabil. Manifold stabil adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen negatif. Sedangkan manifold tidak stabil adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen positif (Robinson 2004).

2.10 Teori Stabilitas Lyapunov

Kestabilan titik tetap dapat dilihat melalui nilai eigen matriks Jacobi. Selain itu, dapat juga ditentukan dengan teori stabilitas Lyapunov. Jadi, sistem pada persamaan (2.4) dapat dianalisis kestabilannya dengan menggunakan teori tersebut.

Misalkan x^* adalah titik tetap dari persamaan (2.4) dan misalkan sebuah fungsi $V: U \rightarrow R$ kontinu dan terdiferensialkan pada domain $U \subset R^n$, maka x^* adalah stabil asimtotik apabila memenuhi kondisi berikut:

1. $V(x)$ definit positif, yaitu apabila $V(x^*) = 0$ dan $V(x) > 0$ jika $x \neq x^*$.
2. $\dot{V}(x)$ adalah definit negatif, yaitu apabila $\dot{V}(x) < 0$ di mana

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} f(t, x).$$

Fungsi $V(x)$ yang memenuhi kedua kondisi tersebut disebut fungsi Lyapunov kuat (Hirsch dan Smale, 1970). Fungsi Lyapunov dari suatu sistem persamaan diferensial tidak tunggal asalkan fungsi tersebut memenuhi sifat-sifat yang diberikan di atas (Luenberger 1979). Di sisi lain, tidak ada metode yang sistematis untuk membangun suatu fungsi Lyapunov. Semuanya hanya *trial and error* (Hirsch dan Smale, 1970).

Melalui definisi yang berbeda, suatu titik tetap dikatakan stabil asimtotik yaitu saat waktu (t) menjadi tak berhingga maka sistem tersebut menuju ke titik keseimbangannya. Apabila terjadi gangguan pada sistem, maka akan mengakibatkan pergeseran yang pada akhirnya kembali bergerak menuju kesetimbangan. Stabil asimtotik dapat bersifat lokal dan global. Bersifat lokal apabila hanya berlaku untuk nilai-nilai awal di sekitar titik keseimbangan. Bersifat global apabila untuk semua nilai awal yang digunakan, sistem akan bergerak menuju suatu titik keseimbangan yang sama (Khalil 2002).

Secara umum fungsi Lyapunov dibangun dari kombinasi fungsi kuadrat komposit, kuadrat bersama, fungsi logaritma, dan fungsi linier. Berikut diberikan beberapa bentuk fungsi Lyapunov di mana x_i^* untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah titik tetap.

1. Fungsi Lyapunov Logaritma diperkenalkan oleh Goh untuk Sistem Lokta-Volterra

$$L(x_1, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n C_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right).$$

2. Fungsi Lyapunov kuadrat bersama

$$V(x_1, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2.$$

3. Fungsi Lyapunov kuadrat komposit

$$W(x_1, x_1, \dots, x_n) = \frac{c}{2} [\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)]^2. \text{ (Yulida et al. 2011)}$$

Apabila diketahui fungsi berikut

$$A(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \tag{2.9}$$

maka persamaan (2.9) adalah definit positif jika dan hanya jika:

$$a > 0 \text{ dan } b^2 - 4ac < 0,$$

dan definit negatif apabila memenuhi

$$a < 0 \text{ dan } b^2 - 4ac < 0. \text{ (Boyce dan Diprima 2001)}$$

Berikut diberikan contoh analisis kestabilan dengan menggunakan fungsi Lyapunov. Misal diberikan suatu sistem persamaan diferensial:

$$\dot{x}_1 = -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 - x_2^3,$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3^3.$$

Didefinisikan $V: D \rightarrow R$ dan $D \subset R^3$ serta diberikan fungsi Lyapunov kuat sebagai berikut

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \quad (2.10).$$

di mana fungsi tersebut kontinu dan terdiferensialkan pada D . Akan dianalisis kestabilan titik teta $(0, 0, 0)$ seperti pada uraian di bawah ini:

1. Fungsi V merupakan fungsi definit positif karena memenuhi $V(0, 0, 0) = 0$ dan $V(x_1, x_2, x_3) > 0$ untuk $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$
2. Selanjutnya akan ditunjukkan \dot{V} adalah fungsi definit negatif, yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 + V_{x_3}\dot{x}_3 \\ &= 2x_1(-2x_2 + x_2x_3 - x_1^3) + 4x_2(x_1 - x_1x_3 - x_2^3) + 2x_3(x_1x_2 - x_3^3) \\ &= -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0. \end{aligned}$$

Karena $\dot{V}(x_1, x_2, x_3) < 0$, maka fungsi V adalah fungsi definit negatif. Jadi, diperoleh bahwa titik tetap $(0, 0, 0)$ adalah titik tetap stabil asimtotik.

3 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi kepustakaan dengan mempelajari beberapa buku referensi, literatur ilmiah, serta hasil temuan dari penelitian sebelumnya. Hal ini berguna sebagai landasan teori dan sumber informasi yang terkait dengan masalah yang akan diteliti.

4 Hasil Penelitian dan Pembahasan

1. Model Penipisan Sumber Daya Hutan

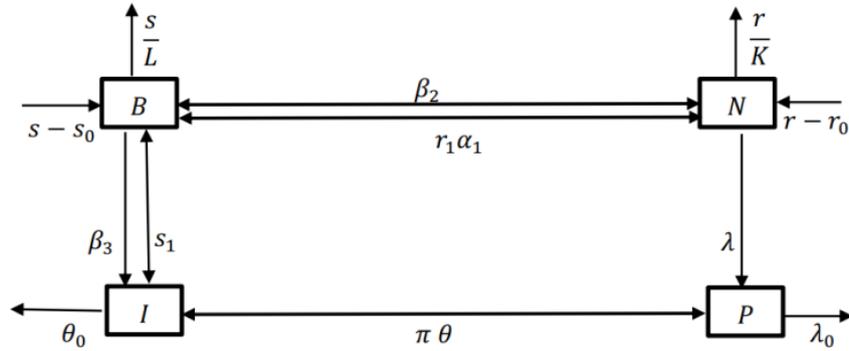
Ada beberapa asumsi yang diberikan pada model penipisan sumber daya hutan, yaitu:

- a. Kepadatan biomassa sumber daya hutan dan populasi penduduk dipengaruhi oleh persamaan logistik.
- b. Rata-rata pertumbuhan tekanan populasi penduduk sebanding dengan kepadatan penduduk.

c. Penipisan sumber daya hutan diasumsikan sebagai akibat dari populasi penduduk dan industrialisasi.

d. Semua parameter pada model bernilai positif.

Pola model penipisan sumber daya hutan secara skematis dapat dilihat pada diagram kompartemen yang telah disajikan (Gambar 1).



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Penipisan Biomassa Sumber Daya Hutan

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} s \left(1 - \frac{2B}{L}\right) - s_0 - \beta_2 N - s_1 I - 2\beta_3 B I - 2\alpha_1 B N & -\beta_2 B - \alpha_1 B^2 & 0 & -s_1 B - \beta_3 B^2 \\ \beta_1 N + 2\alpha_1 r_1 B N & r \left(1 - \frac{2N}{K}\right) - r_0 + \beta_1 B + \alpha_1 r_1 B^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda_0 & -\theta \\ \pi_1 s_1 I & 0 & \pi \theta & \pi_1 s_1 B - \theta_0 \end{bmatrix}$$

Gambar2. Matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (1)

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} s - s_0 - \frac{2s\hat{B}}{L} & -\hat{B}(\beta_2 + \alpha_1 \hat{B}) & 0 & \hat{B}(-s_1 + \beta_3 \hat{B}) \\ 0 & r - r_0 + \hat{B}(\beta_1 + r_1 \alpha_1 \hat{B}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda_0 & -\theta \\ 0 & 0 & \pi \theta & \pi_1 s_1 \hat{B} - \theta_0 \end{bmatrix}$$

Gambar3. Matriks Jacobian Titik Tetap $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$

$$J_{E_3} = \begin{bmatrix} s - \beta_2 \bar{N} - s_1 \bar{I} - s_0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 \bar{N} & r - r_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \theta & -\theta \\ \pi_1 s_1 \bar{I} & 0 & \pi \theta & -\theta_0 \end{bmatrix}$$

Gambar4. Matriks Jacobian Titik Tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$

Berdasarkan asumsi dan diagram kompartemen tersebut, berikut diberikan model penipisan sumber daya hutan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa taklinear:

$$\frac{dB}{dt} = s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B - s_0 B - \beta_2 NB - s_1 I - \beta_3 B^2 I - \alpha_1 B^2 N$$

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N - r_0 N + \beta_1 NB + \alpha_1 r_1 B^2 N, \quad (4.1)$$

$$\frac{dP}{dt} = \lambda N - \lambda_0 P - \theta I,$$

$$\frac{dI}{dt} = \pi \theta P + \pi_1 s_1 IB - \theta_0 I,$$

$$N(0) = N_0 \geq 0, B(0) = B_0 \geq 0, P(0) = P_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, 0 \leq \pi \leq 1, 0 \leq \pi_1 \leq 1.$$

Pada sistem (4.1), $B(t)$ adalah kepadatan biomassa sumber daya hutan, $N(t)$ adalah kepadatan populasi penduduk, $P(t)$ adalah kepadatan tekanan populasi penduduk, dan $I(t)$ adalah kepadatan industrialisasi.

Adapun parameternya, s adalah koefisien rata-rata pertumbuhan intrinsik biomassa sumber daya hutan, L adalah daya dukung biomassa sumber daya hutan, s_0 adalah koefisien rata-rata penipisan biomassa sumber daya hutan secara alami, β_3 merupakan koefisien penipisan sumber daya hutan akibat penumpukan daerah industri, α_1 adalah koefisien penipisan sumber biomassa hutan karena pengaruh kepadatan populasi penduduk, r_1 adalah koefisien tingkat pertumbuhan populasi karena sumber daya biomassa hutan, r_0 adalah koefisien rata-rata kematian populasi secara alami, r adalah rata-rata pertumbuhan intrinsik kepadatan populasi, dan K adalah daya dukung kepadatan populasi, β_1 merupakan rata-rata pertumbuhan seluruh kepadatan populasi akibat sumber daya hutan), β_2 adalah koefisien rata-rata hubungan penipisan biomassa sumber daya hutan dengan kepadatan populasi, λ adalah koefisien rata-rata pertumbuhan tekanan populasi, λ_0 adalah koefisien rata-rata pengurangan tekanan populasi secara alami, θ adalah koefisien rata-rata pengurangan tekanan populasi akibat meningkatnya industrialisasi, s_1 adalah koefisien rata-rata penipisan kepadatan biomassa sumber daya hutan akibat industrialisasi, $\pi_1 s_1$ adalah rata-rata pertumbuhan industrialisasi akibat adanya sumber daya hutan, π adalah rata-rata pertumbuhan industrialisasi karena tekanan populasi, θ_0 adalah koefisien rata-rata pengendali industrialisasi secara eksternal yang dilakukan.

Solusi dari sistem (4.1) adalah solusi yang tak negatif dan terbatas. Hal ini ditunjukkan berdasarkan Lemma 1 berikut:

Lemma 1. Himpunan $\Omega = \{(B, N, P, I): 0 \leq B \leq L, 0 \leq N \leq F_m, 0 \leq P \leq H_m, 0 \leq B + P + I \leq (\lambda F_m + sL)/\phi\}$ adalah solusi dari sistem (1) di mana

$$F_m = \frac{K}{r}(r + \beta_1 L + \alpha_1 r_1 L^2), H_m = \frac{\lambda F_m}{\lambda_0}, \text{ dan } \phi = \min(s_0, \lambda_0, \theta_0).$$

Bukti. Berdasarkan persamaan pertama sistem (1) diperoleh

$$\frac{dB}{dt} \leq s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B \quad (4.2)$$

Karena laju kepadatan biomassa hutan bernilai tak negatif, maka persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$0 \leq \frac{dB}{dt} \leq s \left(1 - \frac{B}{L}\right) B \quad (4.3)$$

Persamaan 3 ini diselesaikan dengan perhitungan aljabar dan dengan menggunakan teorema pembandingan maka didapatkan

$$0 \leq B(t) \leq L \quad (4.4)$$

Berdasarkan persamaan kedua pada sistem (1) diperoleh:

$$\frac{dN}{dt} \leq r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N + \beta_1 N L + \alpha_1 r_1 L^2 N = (r + \beta_1 L + \alpha_1 r_1 L^2) \frac{K}{r} = F_m$$

yang memberikan bentuk:

$$0 \leq N(t) \leq (r + \beta_1 L + \alpha_1 r_1 L^2) \frac{K}{r} = F_m.$$

Berdasarkan persamaan ketiga pada sistem (1) diperoleh :

$$\frac{dP}{dt} \leq \lambda F_m - \lambda_0 P$$

yang memberikan bentuk berikut:

$$0 \leq P(t) \leq \frac{\lambda F_m}{\lambda_0} = H_m.$$

Selanjutnya, dari persamaan terakhir sistem (4.1) dilakukan penjumlahan yang melibatkan variabel $B, P,$ dan I :

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} + \frac{dP}{dt} + \frac{dI}{dt} &\leq \lambda N + sB - s_0B - (1 - \pi_I)s_1IB + (\pi\theta - \lambda_0)P - \theta_0I \\ &\leq \lambda F_m + sL - \phi(B + P + I)\end{aligned}$$

diperoleh $0 \leq B(t) + P(t) + I(t) \leq \frac{\lambda F_m + sL}{\phi}$ dengan $\phi = \min(s_0, \lambda_0 - \theta\pi, \theta_0)$.

2. Analisis Titik Tetap

Titik tetap dari sistem (4.1) diperoleh dengan menentukan $\frac{dB}{dt} = 0$, $\frac{dN}{dt} = 0$, $\frac{dP}{dt} = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$. Dari model tersebut dihasilkan empat titik tetap taknegatif, yaitu $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$, $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$, dan $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ dengan

$$\hat{B} = \frac{L(s-s_0)}{s}, \quad \bar{N} = \frac{K(r-r_0)}{r}, \quad \bar{P} = \frac{\lambda K \theta_0 (r-r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0)}, \quad \text{dan} \quad \bar{I} = \frac{K\pi\theta\lambda(r-r_0)}{r(\pi\theta^2 + \theta_0\lambda_0)}$$

di mana $r > r_0$, dan $s > s_0$.

Titik tetap yang pertama, $E_1(0, 0, 0, 0)$ merupakan kondisi ketika tidak ada pengaruh apapun dari adanya kepadatan populasi, tekanan kepadatan populasi, dan industrialisasi terhadap kepadatan biomassa hutan.

Berikut ini dipaparkan eksistensi titik tetap E^* . Langkah pertama, ruas kanan dari sistem (4.1) dibuat menjadi sama dengan nol. Nilai dari B^* , N^* , P^* , I^* didapatkan dengan menyelesaikan persamaan tersebut, dimana diperoleh:

$$B^* = \frac{L}{s + L\beta_3 I^* + LN^*} (s - s_0 - \beta_2 N^* - s_1 I^*) \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned}N^* &= \frac{K}{r - K\alpha_1 r_1 (B^*)^2} (r - r_0 + \beta_1 B^*) \\ &= f(B^*)\end{aligned} \quad (4.5b)$$

$$I^* = \frac{\pi\theta\lambda f(B^*)}{\lambda_0\theta_0 + \pi\theta^2 - \pi_1 s_1 \lambda_0 B^*} = h(B^*) \quad (4.5c)$$

$$P^* = \frac{\lambda f(B^*) - \theta h(B^*)}{\lambda_0} = g(B^*). \quad (4.5d)$$

$I^* = h(B^*)$ akan bernilai positif jika dan hanya jika

$$\lambda_0\theta_0 + \pi\theta^2 - \pi_1 s_1 \lambda_0 B^* > 0$$

Berdasarkan persamaan pertama pada sistem (4.1) dan mengaplikasikan B^* , N^* , P^* dan I^* pada persamaan tersebut, maka dapat ditulis kembali menjadi:

$$\frac{dB^*}{dt} = \left(s - s_0 - \beta_2 f(B^*) - s_1 h(B^*) - \beta_3 B^* h(B^*) - \alpha_1 r_1 B^* f(B^*) \right) B^* - \frac{s B^{*2}}{L}.$$

dengan

$$s - s_0 - \beta_2 f(B^*) - s_1 h(B^*) - \beta_3 B^* h(B^*) - \alpha_1 r_1 B^* f(B^*)$$

adalah koefisien rata-rata pertumbuhan intrinsik biomassa sumber daya hutan. Ini akan bernilai positif untuk $B^* \geq 0$. Dengan demikian, untuk $B^* = 0$ diperoleh:

$$s - s_0 - \beta_2 \frac{K(r-r_0)}{r} - s_1 h(0) > 0 \quad (4.6)$$

Dengan mensubstitusi bahwa $N^* = f(B^*)$ dan $I^* = h(B^*)$ ke persamaan (4.5a), maka didapatkan

$$B^* = \frac{L}{s + L\beta_3 h(B^*) + Lf(B^*)} (s - s_0 - \beta_2 f(B^*) - s_1 h(B^*)) \quad (4.7)$$

dengan menggunakan persamaan (4.7) dapat didefinisikan $F(B^*)$ sebagai berikut

$$F(B^*) = (s + L\beta_3 h(B^*) + Lf(B^*)) B^* - L(s - s_0 - \beta_2 f(B^*) - s_1 h(B^*)) = 0 \quad (4.8)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.6), maka persamaan (4.8) akan memberikan bentuk:

$$F(0) = -L(s - s_0 - \beta_2 \frac{K(r-r_0)}{r} - s_1 h(0)) < 0$$

$$F(L) = (\beta_3 h(L) + N)L^2 + L(sL + s_0 + \beta_2 f(L) - s_1 h(L)) > 0.$$

Syarat cukup agar B^* menjadi yang unik/khusus apabila $F'(B) > 0$ di titik E^* . Oleh karena itu, dari persamaan (4.8) dapat diperoleh bentuk:

$$F'(B) = s + L\beta_3 h'(B)B + L\beta_3 h(B) + Lf'(B) + L(\beta_2 f'(B) - s_1 h'(B)) > 0$$

karena f' dan h' bernilai positif untuk $\lambda_0 \theta_0 + \pi \theta^2 > \pi_1 s_1 \lambda_0 B^*$.

Ini menunjukkan bahwa terdapat B^* pada interval $0 \leq B \leq L$ sedemikian sehingga $F(B^*) = 0$. Setelah nilai B^* ditemukan, dengan persamaan (4.5b), (4.5c), (4.5d) bisa didapatkan nilai N^* , I^* , dan P^* . Jadi, terlihat eksistensi dari titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$.

Berdasarkan persamaan (4.5b) terlihat bahwa $N^* \rightarrow \frac{K}{r}(r - r_0)$ selama $B^* \rightarrow 0$. Hal ini mengandung makna bahwa kepadatan populasi cenderung menuju daya dukung lingkungan terhadap populasi itu sendiri selama kepadatan biomassa sumber daya hutan cenderung menuju nol.

3. Analisis Kestabilan Titik Tetap

Pada bagian ini dilakukan analisis kestabilan dari sistem persamaan (4.1) untuk setiap titik tetap yang telah dijelaskan sebelumnya. Titik tetap E_1, E_2 , dan E_3 kestabilannya dianalisis dengan menggunakan metode pelinearan. Setelah dilakukan pelinearan pada sistem (4.1), akan diperoleh matriks Jacobi dari sistem persamaan tersebut. Kemudian, dicari matriks Jacobi untuk setiap titik tetap. Jenis kestabilan titik tetap dapat dilihat berdasarkan nilai eigen matriks Jacobiannya [5]. Analisis kestabilan titik tetap E^* dibahas secara khusus dengan menggunakan teori kestabilan Lyapunov.

Pelinearan yang dilakukan pada sistem (4.1) akan memberikan matriks Jacobi seperti yang terlihat pada Gambar 2.

Kestabilan Titik Tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$

Pelinearan sistem (4.1) untuk titik tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$ terhadap matriks Jacobi pada Gambar 2 menghasilkan matriks Jacobi:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} s - s_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r - r_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda\theta & -\theta \\ 0 & 0 & \pi\theta & -\theta_0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks J_{E_1} ditentukan dengan menyelesaikan persamaan $|J_{E_1} - \psi I| = 0$ di mana I adalah matriks identitas, sehingga diperoleh

$$\psi_1 = s - s_0 > 0$$

$$\psi_2 = r - r_0 > 0$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \lambda_0) + \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0^2 - 4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(\theta_0 + \lambda_0) - \frac{1}{2}\sqrt{\theta_0^2 - 4\theta^2\pi + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0}$$

dari hasil tersebut terlihat bahwa nilai eigen ψ_1 dan ψ_2 bernilai positif. Oleh karena itu, titik tetap $E_1(0, 0, 0, 0)$ merupakan titik tetap tidak stabil. Apabila $(\theta_0 + \lambda_0) \pm \sqrt{\theta_0^2 + \lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0 - 4\theta^2\pi} < 0$ maka titik tersebut merupakan titik tetap tak stabil dengan jenis *saddle point*/pelana [5].

Kestabilan Titik Tetap $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$

Pelinearan pada titik tetap $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$ menghasilkan matriks Jacobi seperti pada Gambar 3. Selanjutnya, diperoleh nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $|J_{E_2} - \psi I| = 0$ di mana I adalah matriks identitas seperti berikut ini:

$$\psi_1 = s_0 - s < 0,$$

$$\psi_2 = r - r_0 + \hat{B}(\beta_1 + \hat{B}r_1\alpha_1) > 0$$

$$\psi_{3,4} = \frac{1}{2}(\pi_1 s_1 \hat{B} - \theta_0 - \lambda_0) \pm \frac{1}{2} \left((\pi_1 s_1 \hat{B})^2 - 2(\pi_1 s_1 \hat{B} \theta_0 - \pi_1 s_1 \hat{B} \lambda_0 + \theta_0 \lambda_0 + 2\theta^2 \pi) + \theta_0^2 + \lambda_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

dengan melihat nilai eigen tersebut, ditunjukkan bahwa nilai eigen $\psi_1 < 0$ dan nilai eigen $\psi_2 > 0$. Jadi, titik tetap $E_1(\hat{B}, 0, 0, 0)$ adalah jenis titik tetap *saddle point* dan bersifat takstabil.

Kestabilan titik tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$

Pelinearan pada titik tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ menghasilkan matriks Jacobi seperti pada Gambar 4. Nilai eigen dari matriks J_{E_3} ditentukan dengan menyelesaikan persamaan $|J_{E_3} - \psi I| = 0$ di mana I adalah matriks identitas, sehingga diperoleh

$$\psi_1 = s - s_0 - \beta_2 \bar{N} - s_1 \bar{I}$$

$$\psi_2 = r_0 - r + \frac{2\bar{N}}{K}$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(-\lambda\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0 + \theta_0^2 - 4\theta^2\pi}$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(-\lambda\theta - \theta_0) - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0 + \theta_0^2 - 4\theta^2\pi}$$

berdasarkan nilai eigen tersebut, apabila kondisi di bawah ini terpenuhi, yaitu:

$$(-\lambda_0 - \theta_0) \pm \sqrt{\lambda_0^2 - 2\lambda_0\theta_0 + \theta_0^2 - 4\theta^2\pi} < 0, \text{ dan}$$

$$s - s_0 - \beta_2\bar{N} - s_1\bar{I} > 0,$$

$$r_0 - r + \frac{2\bar{N}}{K} < 0$$

maka titik tetap $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ adalah jenis titik tetap *saddle point* dan bersifat tak stabil.

Kestabilan Titik Tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$

Sifat kestabilan $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ sulit dijelaskan seperti tiga titik tetap sebelumnya. Oleh karena itu, berdasarkan konsep kestabilan Lyapunov, berikut diberikan teorema kondisi yang harus dipenuhi agar E^* stabil asimtotik lokal.

Torema 1. E^* adalah titik tetap stabil asimtotik lokal apabila kondisi berikut ini dipenuhi:

$$s_1\pi_1B^* < \theta_0,$$

$$\frac{\pi\beta_1(\beta_3B^* + s_1)}{\pi_1\beta_2s_1I^*} < \frac{8\lambda_0r}{\lambda^2K}.$$

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 1, langkah pertama yang dilakukan adalah melinearkan sistem persamaan (1) dengan mensubstitusikan persamaan berikut:

$$B = B^* + b, \quad N = N^* + n, \quad P = P^* + p,$$

$$I = I^* + i, \quad (4.9)$$

di mana b, n, p, i adalah gangguan kecil di sekitar titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$. Kemudian diberikan fungsi definit positif sebagai berikut dan didefinisikan bahwa $V: D \subset R^4 \rightarrow R$:

$$V(b, n, p, i) = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1b^2}{B^*} + \frac{c_2n^2}{N^*} + C_3p^2 + C_4i^2 \right) \quad (4.10)$$

dengan C_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah konstanta positif yang dipilih yang sesuai dengan persamaan 4.10. (Dubey *et al.*, 2009). Fungsi pada persamaan (4.10) adalah fungsi Lyapunov karena memenuhi sifat-sifat (Khalil, 2002):

1. Fungsi tersebut adalah fungsi definit positif.

2. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa \dot{V} merupakan fungsi definit negatif. Hal ini dapat dilihat pada uraian berikut.

Turunan V terhadap waktu t untuk sistem (4.1) diformulakan dalam persamaan:

$$\frac{dV}{dt} = V_b \frac{dB}{dt} + V_n \frac{dN}{dt} + V_p \frac{dP}{dt} + V_i \frac{dI}{dt}. \quad (4.11)$$

Selanjutnya, persamaan (4.9) dan persamaan diferensial pada sistem (4.1) disubstitusikan ke dalam persamaan 4.11) sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{C_1 b}{B^*} & \left[s \left(I - \frac{B^* + b}{L} \right) (B^* + b) - s_0 (B^* + b) - \beta_2 (N^* + n) (B^* + b) - s_1 (I^* + i) (B^* + \right. \\ & b) - \beta_3 (B^* + b)^2 (I^* + i) - \alpha_1 (B^* + b)^2 (N^* + n) \left. \right] + \frac{C_2 n}{N^*} \left[r \left(I - \frac{N^* + n}{K} \right) (N^* + n) - \right. \\ & r_0 (N^* + n) + \beta_1 (N^* + n) (B^* + b) + \alpha_1 r_1 (B^* + b)^2 (N^* + n) \left. \right] + C_3 p \left[\lambda (N^* + n) - \right. \\ & \lambda_0 (P^* + p) - \theta (I^* + i) \left. \right] + C_4 i \left[\pi \theta (P^* + p) + \pi_1 s_1 (I^* + i) (B^* + b) - \theta_0 (I^* + i) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pesamaan (4.12) dapat ditulis kembali menjadi bentuk berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{C_1 b}{B^*} & \left[s (B^* + b) - \frac{s}{L} (B^* + b)^2 - s_0 (B^* + b) - \beta_2 (N^* + n) (B^* + b) - s_1 (I^* + i) (B^* + \right. \\ & b) - \beta_3 (B^* + b)^2 (I^* + i) - \alpha_1 (B^* + b)^2 (N^* + n) \left. \right] + \frac{C_2 n}{N^*} \left[r (N^* + n) - \right. \\ & \frac{r}{K} (N^* + n)^2 - r_0 (N^* + n) + \beta_1 (N^* + n) (B^* + b) + \alpha_1 r_1 (B^* + b)^2 (N^* + n) \left. \right] + \\ & C_3 p \left[\lambda (N^* + n) - \lambda_0 (P^* + p) - \theta (I^* + i) \right] + C_4 i \left[\pi \theta (P^* + p) + \pi_1 s_1 (I^* + i) (B^* + \right. \\ & b) - \theta_0 (I^* + i) \left. \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Persamaan (4.13) diuraikan dan diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = C_1 s b + \frac{C_1 s}{B^*} b^2 - \frac{C_1 s B^*}{L} b - \frac{2C_1 s}{L} b^2 - C_1 s_0 b - \frac{C_1 s_0}{B^*} b^2 - C_1 \beta_2 N^* b - \frac{C_1 \beta_2 N^*}{B^*} b^2 - C_1 \beta_2 b n - \\ \frac{C_1 \beta_2}{B^*} b^2 n - C_1 s_1 I^* b - \frac{C_1 s_1 I^*}{B^*} b^2 - C_1 s_1 b i - C_1 \beta_3 B^* I^* b - C_1 \beta_3 B^* b i - 2C_1 \beta_3 I^* b^2 - \\ 2C_1 \beta_3 b^2 i - C_1 \beta_3 I^* b^3 - \frac{C_1 \beta_3}{B^*} b^3 i + C_2 r n + \frac{C_2 r}{N^*} n^2 - \frac{C_2 r N^*}{K} n - \frac{2C_2 r}{K} n^2 - \frac{C_2 r}{KN^*} n^3 - \\ C_2 r_0 n - \frac{C_2 r_0}{N^*} n^2 + C_2 \beta_1 B^* n + C_2 \beta_1 b n + \frac{C_2 \beta_1 B^*}{N^*} n^2 + \frac{C_2 \beta_1}{N^*} b n^2 + C_3 \lambda N^* p + C_3 \lambda n p - \\ C_3 \lambda_0 P^* p - C_3 \lambda_0 p^2 - C_3 \theta I^* p - C_3 \theta p i + C_4 \pi \theta P^* i + C_4 \pi \theta p i + C_4 \pi_1 s_1 I^* B^* i + \\ C_4 \pi_1 s_1 I^* b i + C_4 \pi_1 s_1 B^* i^2 + C_4 \pi_1 s_1 b i^2 - C_4 \theta_0 I^* i - C_4 \theta_0 i^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Berdasarkan persamaan (4.14) diperoleh turunan fungsi Lyapunov V terhadap waktu t untuk sistem (4.1) yang sudah dilinearkkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -\frac{2C_1s}{L}b^2 - C_1\beta_2bn - C_1s_1bi - C_1\beta_3B^*bi - 2C_1\beta_3I^*b^2 - \frac{2C_2r}{K}n^2 - C_4\theta_0i^2 + C_2\beta_1bn + \\ & C_3\lambda np - C_3\lambda_0p^2 - C_3\theta pi + C_4\pi\theta pi + C_4\pi_1s_1I^*bi + C_4\pi_1s_1B^*i^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) dapat ditulis kembali dalam bentuk persamaan (4.16) berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -C_1\left(\frac{2s}{L} + 2C_1\beta_3I^*\right)b^2 - \frac{2C_2r}{K}n^2 - C_3\lambda_0p^2 - C_4(\theta_0 - \pi_1s_1B^*)i^2 \\ & + (C_2\beta_1 - C_1\beta_2)bn + (C_4\pi_1s_1I^* - C_1s_1 - C_1\beta_3B^*)bi + C_3\lambda np \\ & + (C_4\pi\theta - C_3\theta)pi \end{aligned}$$

Sekarang akan ditentukan nilai dari C_i dengan $i = 1, 2, 3, 4$ untuk mereduksi persamaan (4.16). Langkah pertama koefisien dari bn dibuat sama dengan nol, dapat ditulis:

$$C_2\beta_1 - C_1\beta_2 = 0,$$

dipilih $C_2 = 1$ sehingga diperoleh:

$$C_1\beta_2 = \beta_1$$

$$C_1 = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

Kemudian hal yang sama dilakukan untuk koefisien dari bi , sehingga dapat ditulis:

$$C_4\pi_1s_1I^* - C_1s_1 - C_1\beta_3B^* = 0, \quad (4.17)$$

Setelah itu dilakukan substitusi nilai C_1 ke dalam persamaan (4.17) sehingga didapatkan:

$$C_4\pi_1s_1I^* = \frac{\beta_1(s_1 + \beta_3B^*)}{\beta_2},$$

$$C_4 = \frac{\beta_1(s_1 + \beta_3B^*)}{\beta_2\pi_1s_1I^*}. \quad (4.18)$$

Selanjutnya untuk koefisien dari pi juga dibuat bernilai nol, sehingga terbentuk persamaan:

$$C_4\pi\theta - C_3\theta = 0, \quad (4.19)$$

Nilai C_4 pada persamaan (4.18) disubstitusikan pada persamaan (4.19), maka diperoleh C_3 seperti di bawah ini:

$$C_3\theta = C_4\pi\theta,$$

$$C_3 = \frac{\beta_1\pi(s_1 + \beta_3B^*)}{\beta_2\pi_1s_1I^*}. \quad (4.20)$$

Jadi, persamaan (4.16) dapat direduksi menjadi bentuk berikut (persamaan 4.21):

$$\frac{dV}{dt} = -C_1 \left(\frac{2s}{L} + 2C_1\beta_3I^* \right) b^2 - \frac{2r}{K} n^2 - C_3\lambda_0 p^2 - C_4(\theta_0 - \pi_1s_1B^*)i^2 + C_3\lambda np.$$

Dengan C_i untuk $i = 1,2,3$ adalah konstanta positif.

Persamaan (4.21) akan menjadi definit negatif apabila terpenuhinya kondisi di bawah ini (Boyce dan Diprima, 2011):

$$\theta_0 - \pi_1s_1B^* > 0,$$

$$s_1\pi_1B^* < \theta_0.$$

Jadi, semua koefisien dari suku b^2 , n^2 , p^2 , dan i^2 pada persamaan (4.21) sudah bernilai negatif. Langkah selanjutnya menyelesaikan suku terakhir dari persamaan tersebut dengan menggunakan konsep definit negatif, $b^2 - 4ac < 0$ di mana (Boyce dan Diprima, 2011):

$$a = -\frac{2r}{K},$$

$$b = C_3\lambda,$$

$$c = -C_3\lambda_0,$$

nilai a , b , dan c di atas disubstitusikan pada ketaksamaan berikut

$$b^2 - 4ac < 0,$$

$$(C_3\lambda)^2 - 4 \left(-\frac{2r}{K} \right) (-C_3\lambda_0) < 0,$$

dan diperoleh:

$$(C_3\lambda)^2 < 4 \left(\frac{-2r}{K} \right) (-C_3\lambda_0),$$

Karena λ^2 dan C_3 bernilai positif, maka didapatkan pertidaksamaan berikut

$$C_3 < \frac{8\lambda_0 r}{\lambda^2 K}, \quad (4.22)$$

dengan mengganti nilai C_3 yang terdapat pada persamaan (4.20) ke dalam pertidaksamaan (4.22) maka diperoleh:

$$\frac{\pi\beta_1(\beta_3 B^* + s_1)}{\pi_1\beta_2 s_1 I^*} < \frac{8\lambda_0 r}{\lambda^2 K}.$$

Dengan demikian, di bawah kondisi berikut:

$$s_1 \pi_1 B^* < \theta_0$$

$$\frac{\pi\beta_1(\beta_3 B^* + s_1)}{\pi_1\beta_2 s_1 I^*} < \frac{8\lambda_0 r}{\lambda^2 K}$$

titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ adalah titik tetap stabil asimtotik lokal. Jadi, Teorema 1 terbukti.

4. Simulasi Numerik

Salah satu tujuan dari penelitian ini adalah melakukan simulasi model untuk melihat pengaruh dari perubahan nilai parameter. Simulasi dilakukan karena sistem sulit diamati secara langsung sehingga melalui simulasi dapat diamati dinamika model. Nilai parameter awal untuk simulasi adalah (Dubey *et al.*, 2009):

$$L = 40, K = 50, \beta_3 = 6, \pi = 0.001, \theta = 8, \lambda = 5, \beta_1 = 0.01, \beta_2 = 7, \pi_1 = 0.005, s_1 = 4, s = 34, s_0 = \theta_0 = 1, r = 11, r_0 = 10, r_1 = 1, \alpha_1 = 0.00001, \lambda_0 = 4$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut, diperoleh nilai dari titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$

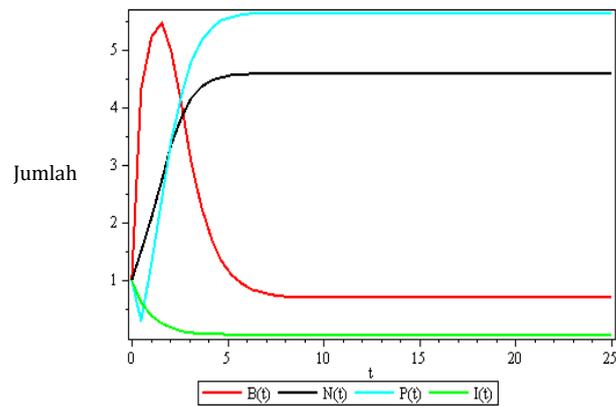
$$B^* = 0.6926500796,$$

$$N^* = 4.576960447,$$

$$P^* = 5.629857464,$$

$$I^* = 0.4567154773.$$

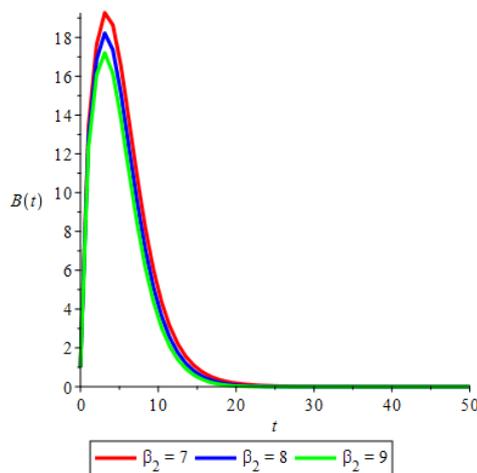
Hal ini dapat diamati pada Gambar 5 :



Gambar 5. Eksistensi Titik Tetap E^*

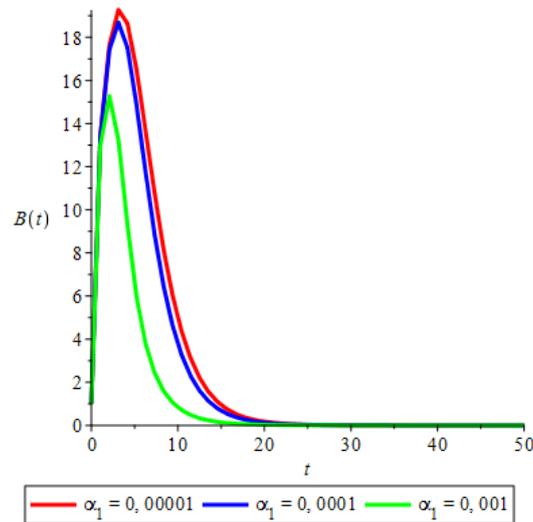
Terlihat pada Gambar 5 bahwa solusi sistem persamaan (4.1) menuju titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$. Kepadatan biomassa hutan menuju nilai keseimbangannya, yaitu 0,69265. Kepadatan populasi penduduk juga menuju nilai keseimbangannya (4,57696). Tekanan kepadatan populasi penduduk menuju nilai keseimbangannya, yaitu 5,62986 dan kepadatan industrialisasi menuju nilai keseimbangannya (0,45672). Dengan demikian, berdasarkan grafik pada Gambar 5 dan karena terpenuhinya kondisi pada Teorema 1 diperoleh bahwa model pada sistem (4.1) stabil asimtotik lokal pada titik tetap $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$.

Berikut ini ditampilkan beberapa gambar grafik hasil simulasi dengan bervariasi nilai parameter yang telah diberikan sebelumnya.



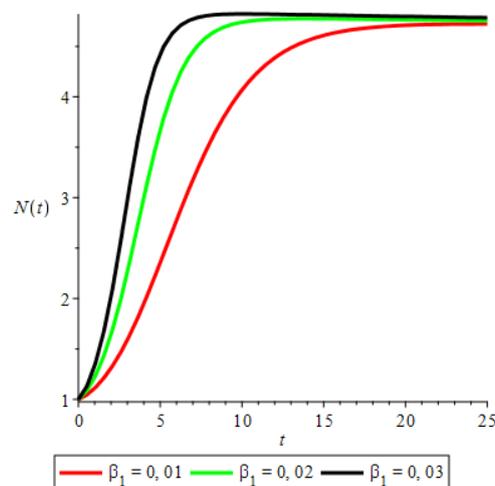
Gambar 6. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai β_2

Gambar 6 memperlihatkan bahwa kepadatan biomassa hutan (B) mengalami penurunan hingga mencapai keseimbangannya seiring terjadi peningkatan pada nilai β_2 . Artinya, terjadi pengurangan kepadatan biomassa hutan akibat terjadi peningkatan laju pengurangan biomassa hutan karena adanya populasi penduduk. Keseimbangan biomassa hutan lebih kecil dari nilai daya dukung lingkungan terhadap biomassa hutan itu sendiri.



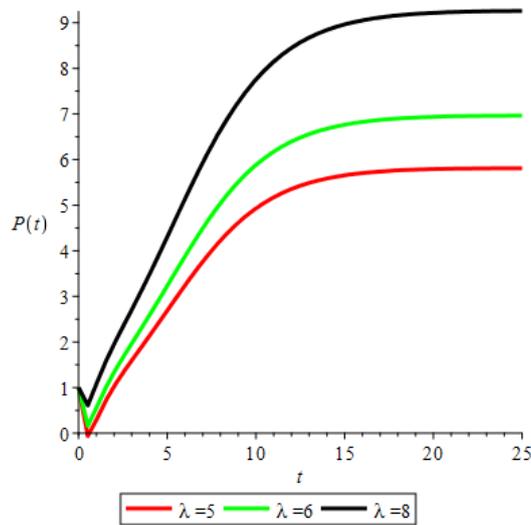
Gambar 7. Perubahan $B(t)$ terhadap t dengan variasi nilai α_1

Gambar 7 menunjukkan bahwa dengan meningkatnya nilai α_1 maka $B(t)$ mengalami penurunan hingga mencapai tingkat kestabilannya. Artinya, apabila terjadi peningkatan pada penipisan sumber biomassa hutan karena pengaruh kepadatan populasi, maka kepadatan biomassa sumber daya hutan akan mengalami penurunan hingga mencapai tingkat kestabilannya.



Gambar 8. Perubahan $N(t)$ terhadap t dengan variasi nilai β_1

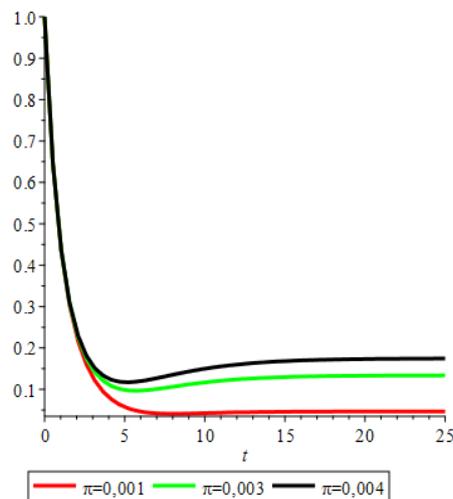
Gambar 8 memperlihatkan bahwa terjadinya peningkatan nilai $N(t)$ seiring dengan meningkatnya nilai parameter β_I yang pada akhirnya mencapai titik kestabilannya. Ini berarti bahwa kepadatan populasi meningkat hingga mencapai titik kestabilannya akibat adanya biomassa hutan.



Gambar 9. Perubahan $P(t)$ terhadap t dengan variasi nilai λ

Gambar 9 menunjukkan bahwa terjadinya peningkatan $P(t)$ menuju nilai kestabilannya sejalan dengan meningkatnya nilai λ . Artinya, apabila terjadi peningkatan pada laju pertumbuhan tekanan populasi penduduk, maka tekanan populasi penduduk juga akan mengalami peningkatan hingga mencapai level keseimbangannya.

$I(t)$



Gambar 10. Perubahan $I(t)$ terhadap t dengan variasi nilai π

Pada gambar 10 terlihat jelas bahwa $I(t)$ mengalami peningkatan sejalan dengan meningkatnya π hingga mencapai kondisi kestabilannya. Hal ini berarti kepadatan industrialisasi akan meningkat apabila laju pertumbuhan industrialisasi akibat adanya tekanan populasi penduduk mengalami peningkatan hingga keadaan tersebut mencapai level keseimbangannya.

5 Kesimpulan

Pada penelitian ini, telah dianalisis model matematika taklinear untuk mempelajari pengurangan biomassa sumber daya hutan akibat populasi penduduk dan tekanan populasi penduduk serta industrialisasi. Model tersebut mempertimbangkan dan melihat faktor penipisan biomassa hutan karena pengaruh kepadatan populasi penduduk serta mempertimbangkan faktor pertumbuhan populasi karena sumber daya biomassa hutan. Model tersebut telah dianalisis dengan menggunakan teori kestabilan dari sistem persamaan diferensial biasa taklinear dan dilakukan simulasi numerik. Berikut diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Analisis model menunjukkan bahwa model matematika penipisan biomassa sumber daya hutan memiliki empat titik tetap tak negatif dimana tiga titik tetap pertama, yaitu $E_1(0, 0, 0, 0)$, $E_2(\hat{B}, 0, 0, 0)$, $E_3(0, \bar{N}, \bar{P}, \bar{I})$ adalah titik tetap tak stabil berjenis *saddle point* jika memenuhi kondisi tertentu. Untuk titik tetap keempat, yaitu $E^*(B^*, N^*, P^*, I^*)$ adalah titik tetap stabil asimtotik lokal apabila memenuhi Teorema 1.
2. Berdasarkan hasil simulasi diperoleh bahwa kepadatan biomassa sumber daya hutan mengalami penurunan hingga mencapai titik keseimbangannya seiring terjadinya peningkatan pada populasi penduduk, tekanan populasi penduduk, dan industrialisasi. Tingkat keseimbangan biomassa hutan tersebut nilainya lebih kecil dari daya dukung lingkungan terhadap sumber daya hutan itu sendiri.
3. Pada hasil simulasi terlihat bahwa pertumbuhan populasi penduduk menyebabkan penurunan biomassa sumber daya hutan. Sebaliknya biomassa sumber daya hutan berpengaruh positif terhadap tingkat populasi penduduk.
4. Untuk seluruh simulasi yang telah diamati, didapatkan apabila kondisi kestabilan terpenuhi, maka dinamika sistem yang terjadi selalu mencapai tingkat keseimbangannya.

6 Daftar Pustaka

1. Anggriani, I., Nurhayati, S., & Subchan, S. (2018). Analisis Kestabilan Model Penurunan Sumber Daya Hutan Akibat Industri. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 15(1), 31. <https://doi.org/10.12962/limits.v15i1.3560>
2. Boyce, W. E., & DiPrima, R. E. (2012). *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*.
3. Dubey, B., Sharma, S., Sinha, P., & Shukla, J. B. (2009). Modelling the depletion of forestry resources by population and population pressure augmented industrialization. *Applied Mathematical Modelling*, 33(7), 3002–3014. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.10.028>
4. Dubey, B., Upadhyay, R. K., & Hussain, J. (2002). Effects of industrialization and pollution on resource biomass: A mathematical model. In *Ecological Modelling (Issues 1–2)*. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00168-6](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00168-6)
5. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. In Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
6. Mohamad, R., Rauf, M. D. A., & Lakisa, N. (2019). Model Matematika Kerusakan Hutan dengan Memperhatikan Faktor Industri dan Kebakaran. *EULER: Jurnal Matematika, Sains Dan Teknologi*, 7(1), 6–14.
7. Ramdhani, V., Jaharuddin, & Nugrahani, E. H. (2015). Dynamical system of modelling the depletion of forestry resources due to crowding by industrialization. *Applied Mathematical Sciences*, 9(81–84), 4067–4079. <https://doi.org/10.12988/ams.2015.53259>
8. Robinson, J. (2004). *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. UK: Cambridge University Press.
9. Shukla, J. B., Kusum, L., & Misra, A. K. (2011). Resource By Population and Industrialization : Effect of Technology on Its Conservation. *Natural Resource Modeling*, 24(2), 242–267. <http://0-onlinelibrary.wiley.com.library.regent.edu/doi/10.1111/j.1939-7445.2011.00090.x/pdf>
10. Sundar, S., Swaroop, N., & Naresh, R. (2017). Modeling the Effect of Population and Population Augmented Industrialization on Forestry Resources. *European Journal of Engineering Research and Science*, 2(1), 65. <https://doi.org/10.24018/ejers.2017.2.1.247>
11. Wakhidah, U. U. S., Nugrahani, K., & Winarni, W. (2022). Analysis of Mangrove Forest Resource Depletion Models due to The Opening of Fish Pond Land with Time Delay. *Jurnal ILMU DASAR*, 23(1), 65. <https://doi.org/10.19184/jid.v23i1.23889>

7 Realisasi Anggaran

1. Honorarium Pengolahan Data				
Honor		Honor		Jumlah (Rp)
Honor Pelaksana Pengolahan Data Penelitian		500.000,00		500.000,00
Subtotal (Rp)				500.000,00
2. Pembelian Bahan Habis Pakai				
Material	Justifikasi Pembelian	Kuantitas	Harga Satuan (Rp)	Jumlah (Rp)
Kertas A4 (80 gram)	Mencetak laporan penelitian	1 rim	45.000,00	40.000,00
Tinta catrige canon (warna)	Mencetak laporan penelitian	1 unit	50.000,00	50.000,00
Tinta catrige canon (hitam)	Mencetak laporan penelitian	1 unit	40.000,00	50.000,00
Paket internet	Mencari referensi dan pengumpulan data	1	250.000,00	295.000,00
Subtotal (Rp)				295.000,00
3. Penulisan Artikel				
Material	Kuantitas		Harga Satuan (Rp)	Jumlah (Rp)
Jasa Translator	1 kali		750.000,00	750.000,00
Subtotal (Rp)				750.000,00
Total Anggaran yang Diperlukan (Rp)				1.540.000,00