

**LAPORAN KEGIATAN
PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT (PkM)**



**JURI OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT SMA/ MA
SE-NASIONAL**

Oleh:

Gema Hista Medika, M.Si

Dr. Rusdi, S.Pd, M.Si

Dr. Risnawita, S.Pd, M.Si

**FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN (FTIK)
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
SJECH M. DJAMIL DJAMBEK
BUKITTINGGI
2022**

JURI OLIMPIADE MATEMATIKA TINGKAT SMA/ MA SE-NASIONAL

Peningkatan mutu, minat, dan bakat dalam seni bermatematika dapat diasah melalui berbagai cara, salah satu di antaranya adalah dengan mengikuti perlombaan atau kompetisi. Untuk dapat berpartisipasi aktif dalam berbagai kompetensi matematika dan dalam rangka mengasah kemampuan para siswanya, pihak pelaksana (dalam hal ini mitra PkM) melakukan berbagai upaya baik dalam bentuk kegiatan kurikuler melalui pembelajaran di kelas, maupun dalam bentuk kegiatan ekstra kurikuler atau tambahan. Hal ini yang menyebabkan kegiatan PkM ini muncul, karena pihak pelaksana memercayakan juri kepada dosen matematika UIN Sjech M.Djamil Djambek Bukittinggi.

Oleh karena itu, pihak pelaksana mengajukan permohonan yang ditujukan pada Program Studi Pendidikan Matematika FTIK UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi untuk dapat berpartisipasi sebagai juri. Permohonan dari pihak tersebut kami sambut dengan sangat baik, karena akan memberikan efek positif pada kedua belah pihak. Di satu sisi, kegiatan ini merupakan upaya pengabdian dosen dalam rangka menyebar luaskan ilmu pengetahuan sehingga bermanfaat secara langsung, di pihak lain memerlukan juri dalam acara olimpiade tersebut. Berdasarkan situasi tersebut, maka tim dosen pada prodi PMTK merancang suatu program PkM dengan judul “Juri Olimpiade Matematika Tingkat SMA/ MA Se-Nasional”. Adapun tim PkM tersebut dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Juri Olimpiade Matematika SMA/ MA se-Nasional

No	Nama	Tingkat
1	Gema Hista Medika, M.Si	SMA/ MA
2	Dr. Rusdi, S.Pd, M.Si	SMA/ MA
3	Dr. Risnawita, S.Pd, M.Si	SMA/ MA

Lampiran

Laporan Kegiatan

SOAL BABAK FINAL SMA

SOAL WAJIB

PAKET A

1. Sepuluh santri akan bepergian dengan 2 mobil yang berkapasitas 6 orang dan 7 orang. Setiap mobil harus berisi paling sedikit 2 santri, maka banyak kemungkinan para santri berdistribusi kedalam mobil tersebut adalah...

Pembahasan :

Diketahui sepuluh orang akan bepergian dengan 2 mobil yang masing-masing berkapasitas 6 orang dan 7 orang. Jika setiap mobil harus berisi sekurang-kurangnya 2 orang, maka banyak kemungkinan mereka berdistribusi kedalam 2 mobil tersebut:

$$n(A) = 2 (C_3^{10} \cdot C_7^7 + C_4^{10} \cdot C_6^6 + C_5^{10} \cdot C_5^5 + C_6^{10} \cdot C_4^4)$$

$$n(A) = 2 (792)$$

$$n(A) = 1584$$

2. Tentukan sisa pembagian 6^{1987} dibagi 37

Pembahasan :

$$6^{1987} \equiv 6(6)^{1987} \pmod{37}$$

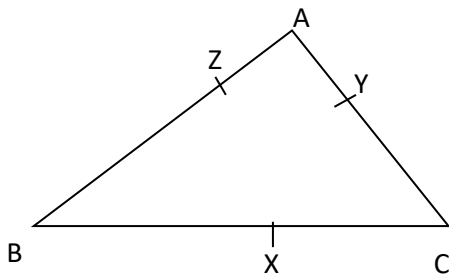
$$\equiv 6(6^2)^{993} \pmod{37}$$

$$\equiv 6(-1)^{993} \pmod{37}, \text{ karena } 6^2 \equiv -1 \pmod{37}$$

$$\equiv -6 \equiv 31 \pmod{37}$$

Jadi, sisa pembagian 6^{1987} oleh 37 adalah 31

- 3.



Titik X, Y, Z terletak pada segitiga ABC dengan $AZ = AY$, $BZ = BX$, dan $CX = CY$ seperti pada gambar. Jika AB, AC, dan BC berturut-turut adalah 4 cm, 3 cm, dan 5 cm, maka luas segitiga CXY adalah

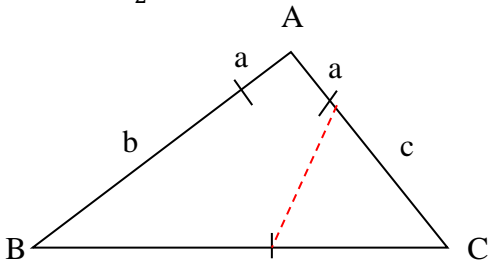
Pembahasan :

Pada segitiga siku-siku, berlaku :

$$\sin \theta = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$$

Luas segitiga dengan rumus trigonometri :

$$\text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$$



$$\text{Nilai } \sin \angle BCA = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{BA}{BC} = \frac{4}{5}$$

Persamaan yang bisa kita peroleh :

$$a + b = 4, b + c = 5 \text{ dan } a + c = 3.$$

Menentukan nilai c dari ketiga persamaan :

$$(a + b) + (b + c) + (a + c) = 4 + 5 + 3$$

$$2(a + b + c) = 12$$

$$a + b + c = 6 \text{ (substitusi } a + b)$$

$$4 + c = 6$$

$$c = 2$$

Menentukan luas segitiga CXY

$$\text{Luas } \triangle CXY = \frac{1}{2} \cdot c \cdot c \cdot \sin BCA = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

Jadi, luas segitiga CXY adalah $\frac{8}{5}$

4. Jika $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{4}{7}$ maka nilai dari $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$ adalah

Pembahasan :

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{4}{7}$$

$$7(a-b)(c-d) = -4(b-c)(d-a)$$

$$7(ac - ad - bc + bd) = -4(bd - ab - cd + ac)$$

$$7ac - 7ad - 7bc + 7bd = -4bd + 4ab + 4cd - 4ac$$

$$\text{Tambah kedua ruas dengan } (4ac - 4ad - 4bc + 4bd)$$

$$11ac - 11ad - 11bc + 11bd = 4ab - 4ad - 4bc + 4cd$$

$$11(ac - ad - bc + bd) = 4(ab - ad - bc + cd)$$

$$11(a-b)(c-d) = 4(a-c)(b-d)$$

$$\frac{11}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

5. Salah satu ahli matematika yang memperkenalkan simbolise ke dalam aljabar

Pembahasan :

Jadi, nama bapak ahli matematika yang memperkenalkan simbolise ke dalam aljabar adalah bapak

PAKET B

1. Tentukan sisa dari 7^{2010} dibagi 12

Pembahasan :

$$\begin{aligned} 7^{2010} &\equiv 7^{2000} \cdot 7^{10} \pmod{12} \\ &\equiv (7^2)^{1000} \pmod{12} \cdot (7^2)^5 \pmod{12} \\ &\equiv (1)^{1000} \pmod{12} \cdot (1)^5 \pmod{12} \\ &\equiv 1 \pmod{12} \cdot 1 \pmod{12} \\ &\equiv 1 \pmod{12} \end{aligned}$$

Jadi, sisa dari 7^{2010} dibagi 12 = 1.

2. Di kota Bukittinggi akan diadakan acara jalan sehat, yang mana setiap peserta diberikan undian berbentuk bilangan yang tersusun dari angka 2,5,5,7,8. Apabila undian tersebut disusun dari angka terkecil sampai terbesar, maka berapa banyak undian dengan kode yang lebih besar dari 75.000....

Pembahasan :

- Undian dengan bilangan 75xxx, maka banyaknya kemungkinan: P_1^3
- Undian dengan bilangan 78xxx, maka banyaknya kemungkinan: P_2^3
- Undian dengan bilangan 8xxxx, maka banyaknya kemungkinan: P_2^4

Maka banyaknya undian dengan kode lebih besar dari 75.000:

$$P_1^3 + P_2^3 + P_2^4 = \frac{3!}{(3-1)!} + \frac{3!}{(3-2)!} + \frac{4!}{(4-2)!} = 3 + 6 + 12 = 21$$

3. Diberikan dua bilangan asli dua angka yang selisihnya 10. Diketahui bahwa bilangan yang kecil merupakan kelipatan 3, sedangkan lainnya merupakan kelipatan 7. Diketahui pula bahwa jumlah semua faktor prima kedua bilangan tersebut adalah 17. Jumlah dua bilangan tersebut adalah ...

Pembahasan :

Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y , karena x adalah bilangan kelipatan 7 dan y adalah bilangan kelipatan 3, maka untuk x dan y adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai

$$x = 7m$$

$$y = 3n$$

Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan $x > y$, maka $x - y = 10$. Ini sama saja dengan persamaan $7m - 3n = 10$

Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid,

Yaitu $7 = 2 \times 3 + 1$

Sehingga, $1 = 7 - 2 \times 3$

Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh $10 = 70 - 60$

Sehingga, diperoleh $m = 10$ dan $n = 20$

Sehingga, solusi umumnya adalah

$$m = 10 - 3t \Rightarrow x = 70 - 21t$$

$$n = 20 - 7t \Rightarrow y = 60 - 21t$$

Diperoleh pasangan bilangan dua digit x , yang memenuhi adalah

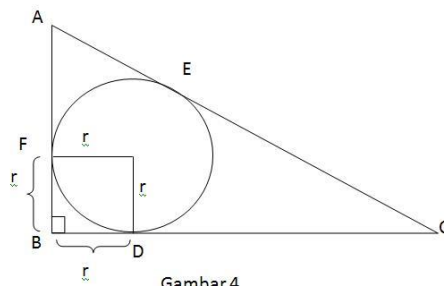
$$(x, y) = \{ (28,18), (49,39), (70,60), (91,81) \}$$

Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima x dan y adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$

Maka $+q = 7$, sehingga bilangan prima p , yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.

Sehingga, jelas diantara pasangan x , yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$ dan $y = 60$ Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

4.



Segitiga ABC memiliki panjang $AB = 10$ cm, $BC = 24$ cm, dan $CA = 26$ cm. Tentukan lah panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC!

Pembahasan :

Jika diamati, segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku. Maka berlaku Pythagoras:

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

$$10^2 + 24^2 = 26^2$$

$$100 + 576 = 676$$

$$AB = 10 \text{ maka } AF = AB - FB = 10 - r$$

$$BC = 24 \text{ maka } CD = BC - BD = 24 - r$$

Garis singgung yang ditarik dari satu titik ke sebuah lingkaran panjangnya pasti sama, sehingga:

$$AE = AF = 10 - r$$

$$CE = CD = 24 - r$$

Dari gambar diperoleh:

$$CA = CE + AE$$

$$26 = 10 - r + 24 - r$$

$$26 = 34 - 2r$$

$$2r = 8$$

$$r = 4$$

5. Aljabar adalah penyempurnaan dari pengetahuan yang diperoleh dari....

Jawab : bangsa Mesir dan Babilonia

PAKET C

1. Tentukan sisa pembagian 2^{1000} dibagi 13

Pembahasan :

$$\begin{aligned} 2^{1000} \bmod 13 &\equiv 2^{6 \cdot 166 + 4} \bmod 13 \\ &\equiv (2^6)^{166} \cdot 2^4 \bmod 13 \\ &\equiv (64)^{166} \cdot 2^4 \bmod 13 \\ &\equiv (13 \cdot 5 - 1)^{166} \cdot 2^4 \bmod 13 \\ &\equiv (-1)^{166} \cdot 2^4 \bmod 13 \\ &\equiv 1 \cdot 2^4 \bmod 13 \\ &\equiv 16 \bmod 13 \\ &\equiv 13 \cdot 1 + 3 \bmod 13 \\ &\equiv 3 \bmod 13 \end{aligned}$$

Jadi, sisa dari pembagian 2^{1000} dibagi 13 adalah 3.

2. Jika semua nilai x dengan $-1 \leq x \leq 3$ yang memenuhi $|x + 2| - \sqrt{4x + 8} \leq 0$ adalah $a \leq x \leq b$, maka nilai $2a + b$ adalah

Pembahasan :

Menggunakan $\sqrt{x^2} = |x|$ dan defenisi nilai mutlak $|x| = \{x, \text{ untuk } x \geq 0;$

$-x, \text{ untuk } x < 0\}$ pertama kita mulai dari syarat fungsi $\sqrt{4x + 8}$, agar bernilai real, maka $4x + 8 \geq 0$ atau $x \geq -2$

$$|x + 4| - \sqrt{4x + 8} \leq 0$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)^2} &\leq (\sqrt{4x+8})^2 \\ x^2 + 4x + 4 &\leq 4x + 8 \\ x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 &\leq 0 \\ x^2 - 4 &\leq 0 \\ (x-2)(x+2) &\leq 0 \\ -2 &\leq x \leq 2\end{aligned}$$

Irisan $x \geq -2$ dan $-2 \leq x \leq 2$ adalah $-2 \leq x \leq 2$.

Karena nilai x yang diminta adalah semua nilai x pada $-1 \leq x \leq 3$ sehingga himpunan penyelesaian yang diminta irisan dari $-1 \leq x \leq 3$ dan $-2 \leq x \leq 2$, yaitu $-1 \leq x \leq 2 \equiv a \leq x \leq b$ sehingga nilai $2a + b = -2 + 2 = 0$

3. Misalkan suatu lingkaran dan persegi masing-masing mempunyai luas L dan P . Jika keliling keduanya sama, maka $L =$

Pembahasan :

Menentukan jari-jari dan panjang sisi dari luasnya lingkaran, luas = L

Luas lingkaran = L

$$\pi r^2 = L$$

$$r^2 = L/\pi$$

$$r = \sqrt{\frac{L}{\pi}}$$

Luas persegi = P

$$s^2 = P$$

$$s = \sqrt{P}$$

menentukan hubungan L dan P

keliling lingkaran = keliling persegi

$$2\pi r = 4s$$

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{\pi}} = 4\sqrt{P}$$

$$\pi \sqrt{\frac{L}{\pi}} = 2\sqrt{P}$$

$$\pi^2 \cdot \frac{L}{\pi} = 4 \cdot P$$

$$\pi \cdot L = 4P$$

$$L = \frac{4P}{\pi}$$

Jadi, diperoleh $L = \frac{4P}{\pi}$

4. Pada saat acara perpisahan sekolah, terdapat 8 orang yang hendak berfoto yang terdiri dari siswa, kedua orangtua, dan keluarga lainnya. Jika mereka berfoto membentuk satu barisan, berapakah banyak cara menata pose foto sehingga orangtuanya berdiri tidak saling berdekatan...

Pembahasan :

Banyak cara menata pose foto 8 orang dalam satu baris adalah:

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320 \text{ cara.}$$

Banyak cara menata pose foto 8 orang sehingga kedua orangtuanya berdiri saling berdekatan/berdampingan dapat diibaratkan dengan skema berikut.

$$OOABCDEF \Rightarrow XABCDEF$$

Dengan OO = X yang penyusunannya ada 2! Cara, sedangkan XABCDEF penyusunannya ada 7! Cara sehingga totalnya adalah

$$2! \times 7! = 2 \times 5040 = 10.080 \text{ cara.}$$

Jadi, banyak cara menata pose foto sehingga kedua orangtuanya berdiri tidak saling berdekatan/berdampingan adalah

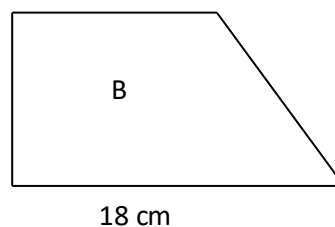
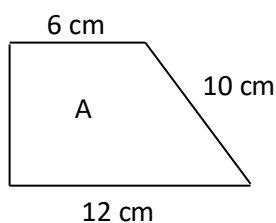
$$40.320 - 10.080 = 30.240 \text{ cara.}$$

5. Pada bidang matematika yang mengkaji tentang operasi numeris adalah

Jawab : Aritmatika

PAKET D

1. Gambar dua trapesium berikut adalah sebangun.



Luas trapesium B adalah

Pembahasan :

Tinggi trapesium A dapat dihitung dengan menerapkan rumus pythagoras, yaitu

$$t_A = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Pada trapesium B, sisi atas dapat ditentukan dengan perbandingan, yaitu

$$\frac{12}{18} = \frac{6}{x} \leftrightarrow x = \frac{6 \times 18}{12} = 9 \text{ cm}$$

Tinggi trapesium B juga dapat ditentukan dengan perbandingan.

$$\frac{12}{18} = \frac{8}{t_B} \leftrightarrow x = \frac{18 \times 8}{12} = 12 \text{ cm}$$

Dengan demikian, luas trapesium B adalah

$$\begin{aligned} L_B &= \frac{(18 + 9) \times 12}{2} \\ &= 27 \times 6 = 162 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2. Tentukan sisa dari 3^{1990} dibagi 41

Pembahasan :

$$\begin{aligned} 3^{1990}(\text{mod } 41) &\equiv 3^{4 \cdot 497 + 2}(\text{mod } 41) \\ &\equiv (3^4)^{497} \times 3^2(\text{mod } 41) \\ &\equiv (2 \times 41 - 1)^{497} \times 9(\text{mod } 41) \\ &\equiv (-1)^{497} \times 9(\text{mod } 41) \\ &\equiv -9(\text{mod } 41) \\ &\equiv (41 - 9)(\text{mod } 41) \\ &\equiv 32(\text{mod } 41) \end{aligned}$$

Jadi, sisa dari pembagian 3^{1990} dibagi 41 adalah 32.

3. Allah SWT telah menghalalkan praktek jual beli yang sesuai dengan ketentuan dan syari'atNya. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Surat Al Baqarah ayat 275 yang artinya:” ...Dan Allah telah menghalalkan jual beli dan mengharamkan riba...(Q.S. al-Baqarah: 275). Rasulullah SAW bersabda: Emas ditukar dengan emas, perak dengan perak, gandum dengan gandum, kurma dengan kurma, garam dengan garam, sama beratnya dan langsung diserahterimakan. Apabila berlainan jenis, maka juallah sesuka kalian namun

harus langsung diserahkan/secara kontan” (HR. Muslim). Maka berdasarkan hadits ini, jual beli merupakan aktivitas yang disyariatkan. Ali menerapkan hukum islam tersebut dengan menjual kurma. Ali membeli 1 kg kurma dengan harga 30.000 . Dari 1 kg kurma ali hanya mendapat untung 0,25% .Berapakah keuntungan ali setara dengan surat apakah itu?

Pembahasan :

$$P\% = \frac{\text{untung}}{\text{harga beli}} \times 100 \%$$

$$20\% = \frac{\text{untung}}{30.000} \times 100 \%$$

$$\begin{aligned} \text{Untung} &= 0,25\% \times \frac{30.000}{100\%} \\ &= 75 \end{aligned}$$

4. Di dalam tas Ani berisi 15 pulpen, 5 pulpen diantaranya tintanya habis. Untuk memisahkan pulpen yang masih ada tinta dan pulpen yang tintanya sudah habis dilakukan pengetesan satu persatu tanpa pengembalian. Peluang diperoleh pulpen yang tintanya sudah habis ke-3 pada pengetesan ke-5 adalah...

Pembahasan

Misalkan pengambilan pulpen ke-1 tintanya habis, ke-2 tintanya habis, ke-3 masih ada tinta, ke-4 masih ada tinta dan ke-5 tintanya habis. Pengambilan ke-5 harus pulpen yang tintanya sudah habis, maka terdapat 4 tempat yang tersisa untuk 2 pulpen yang tintanya sudah habis, sehingga banyak cara pengambilan 2 pulpen yang tintanya sudah habis dari 4 tempat yang tersedia adalah:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Peluang diperoleh pulpen yang tintanya sudah habis ke-3 pada pengetesan ke-5

$$P = \left(\frac{C_1^5}{C_1^{15}} \cdot \frac{C_1^4}{C_1^{14}} \cdot \frac{C_1^{10}}{C_1^{13}} \cdot \frac{C_1^9}{C_1^{12}} \cdot \frac{C_1^3}{C_1^{11}} \right). \text{ Banyak cara pengambilan}$$

$$= \left(\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} \right) \cdot 6$$

$$= \frac{90}{1001}$$

5. Sebutkan contoh dari operasi biner

Jawab : contoh operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan akar.

PAKET E

1. Jika x adalah banyaknya ayat dalam Surah Al – Kahfi, maka banyaknya kemungkinan bilangan bulat y sedemikian sehingga $\frac{2y-x-12}{y+7}$ juga bilangan bulat adalah ...

Pembahasan :

Surat Al – Kahfi merupakan surah ke 18 dan memiliki 110 ayat. Sehingga $\frac{2y-x-12}{y+7}$

$$\frac{2y - x - 12}{y + 7} = \frac{2y - 110 - 12}{y + 7}$$

$$= \frac{2y-122}{y+7}$$

$$= \frac{2(y+7)-136}{y+7}$$

$$= \frac{2(y+7)}{y+7} - \frac{136}{y+7}$$

$$= 2 - \frac{136}{y+7}$$

136 habis dibagi $y + 7$ merupakan faktor dari 136 yang merupakan bilangan bulat yaitu 1, (-1), 136, (-136), 2, (-2), 68, (-68), 4, (-4), 34, (-34), 8, (-8), 17, dan (-17). Kemudian uji salah satu nilai ke $\frac{2y-122}{y+7}$.

Uji $y + 7 = 2 \rightarrow y = -5$

Coba ke $\frac{2y-122}{y+7} = \frac{2(-5)-122}{(-5)+7}$

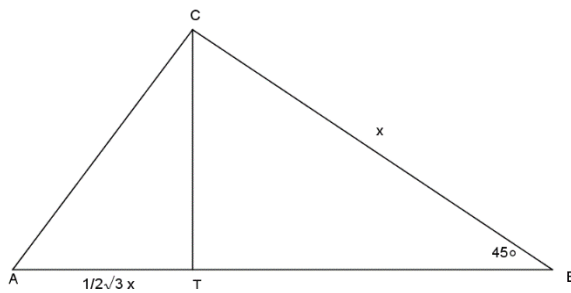
$$= \frac{-10 - 122}{2}$$

$$= \frac{-132}{2} = 66$$

Karena $\frac{2y-122}{y+7} = 66$, dimana 66 merupakan bilangan bulat, maka banyaknya kemungkinan bilangan bulat y yaitu 16 bilangan.

2. Pada segitiga ABC diketahui sudut B sebesar 45° dan $CT \perp AB$. Jika $BC = x$ dan $AT = \frac{1}{2}\sqrt{3}x$ maka $\cos A = \dots\dots$

Pembahasan :



$$\sin 45^\circ = \frac{CT}{BC}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{CT}{x}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}x = CT$$

$$AC^2 = AT^2 + CT^2$$

$$AC^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)^2$$

$$AC^2 = \frac{3}{2}x^2 + x^2$$

$$AC^2 = \frac{5}{2}x^2$$

$$AC = \frac{1}{2}x\sqrt{5}$$

$$\cos A = \frac{AT}{AC}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}x}{\frac{1}{2}x\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}x}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

3. Apabila terdapat empat sepeda motor dan dua minibus akan diparkir pada 6 tempat parkir yang berderet memanjang serta keempat sepeda motor yang diparkir tidak bersebelahan, maka banyak susunan parkir yang berbeda adalah...

Pembahasan :

- Banyak susunan parkir untuk 6 kendaraan dengan posisi parkir tanpa syarat adalah:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \dots \times 1 = 6! = 720$$

- Banyak susunan parkir untuk 6 kendaraan dimana 2 sepeda motor harus berdekatan. Dengan menganggap dua sepeda motor adalah “satu” unsur maka unsur yang akan disusun adalah “lima” dan saat posisi sepeda motor itu berdekatan ada 2! Posisi yang mungkin terjadi, sehingga banyak posisi parkir adalah:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2! = 240$$

- Banyak susunan parkir untuk 6 kendaraan dimana 4 sepeda motor tidak berdekatan adalah:

$$720 - 240 = 480$$

4. Tentukan sisa dari 10^{2017} dibagi 7

Pembahasan :

$$\begin{aligned} 10^{2017} \pmod{7} &\equiv (10 \pmod{7})^{2017} \pmod{7} \\ &\equiv (3 \pmod{7})^{2017} \pmod{7} \\ &\equiv (3)^{2017} \pmod{7} \\ &\equiv 3^{2017} \pmod{\phi(7)} \pmod{7} \\ &\equiv (3)^{2017} \pmod{6} \pmod{7} \\ &\equiv 3 \pmod{7} \end{aligned}$$

Jadi, sisa dari pembagian 10^{2017} dibagi 7 adalah 3.

5. Apa perbedaan antara operasi numeris, uner, dan biner.....

Jawab : Prosedur-prosedur tertentu yang mengambil bilangan sebagai masukan dan menghasilkan bilangan lainnya sebagai keluran, disebut sebagai operasi numeris.

Operasi uner adalah operasi dengan hanya satu operand, yaitu satu input. Ini berbeda dengan operasi biner, yang menggunakan dua operan.

Operasi biner, yang mengambil dua bilangan sebagai masukan dan menghasilkan satu bilangan sebagai keluaran. Contoh operasi biner yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan perakaran. Bidang matematika yang mengkaji operasi numeris disebut sebagai aritmetika.

SOAL FINAL REBUTAN SMA

1. اللَّهُ الَّذِي خَلَقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ اسْتَوَىٰ عَلَى الْعَرْشِ مَا لَكُمْ مِّنْ دُونِهِ مِنْ وَلِيٍّ وَلَا شَفِيعٍ أَفَلَا تَتَذَكَّرُونَ

Jika bilangan yang termuat pada ayat tersebut adalah b , maka nilai maksimum hingga b^c merupakan faktor dari $2022!$ adalah ...

Pembahasan :

$b = 6 \rightarrow b^c = 6^c$ merupakan faktor dari $2022!$

$2022! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12. \dots .2022!$

$$6, 2 \times 6, 3 \times 6, 6 \times 4$$

$$c = 6^1 \rightarrow \left\lfloor \frac{2022}{6} \right\rfloor = 337$$

$$c = 6^2 \rightarrow \left\lfloor \frac{2022}{36} \right\rfloor = 56$$

$$c = 6^3 \rightarrow \left\lfloor \frac{2022}{216} \right\rfloor = 9$$

Untuk mencari nilai maksimum dari b^c tinggal dijumlahkan seluruh nilai c

Sehingga, diperoleh $337 + 56 + 9 = 402$ jadi nilai maksimum dari b^c adalah 402.

2. Di dalam suatu kotak terdapat beberapa kartu bernomor. Ada satu kartu bernomor 1, dua kartu bernomor 2, tiga kartu bernomor 3, dan seterusnya sampai dua puluh kartu bernomor 20. Jika kita ingin mengambil 10 kartu bernomor sama dari kotak tersebut, paling tidak berapa banyak kartu yang harus kita ambil?

Pembahasan :

Dengan menganggap kita dalam kondisi yang paling tidak beruntung, kita mendapatkan tepat 9 kartu untuk masing – masing nomor dari 1 sampai 20. Khusus untuk kartu bernomor 1 sampai 8, kita ambil semua kartu yang ada sesuai banyaknya dikotak. Jadi, kita peroleh kartu sebanyak

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + \underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_{\text{Ada 12}} \\
 &= (1 + 8) \times 4 + 12 \times 9 \\
 &= 36 + 108 = 144
 \end{aligned}$$

Sampai sini kita masih belum mendapatkan 10 kartu bernomor sama tetapi dengan mengambil satu kartu lagi didalam kotak kita pastikan mendapatkannya. Jadi, dengan menggunakan prinsip sarang burung merpati yang kedua paling sedikit kita harus mengambil $144 + 1 = 145$ kartu.

3. Jika suku banyak $P(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ habis dibagi $x^2 + 1$ dan $x + a$, maka $ab = \dots$

Pembahasan :

Jika sebuah bilangan a habis dibagi x dan y maka berlaku $a \equiv k \cdot x \cdot y$

Contoh: 140 habis dibagi 5 dan 2 sehingga berlaku

$$140 \equiv k \cdot 5 \cdot 2 \text{ dan nilai k yang memnuhi adalah } k = 14$$

Suku banyak $P(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ habis dibagi oleh $x^2 + 1$ dan $x + a$.

$$\begin{aligned}
 & ax^3 + x^2 + bx + 1 \\
 & \equiv k \cdot (x^2 + 1)(x + a) \\
 & 0 \equiv k \cdot (x^3 + ax^2 + x + a) \\
 & 0 \equiv kx^3 + akx^2 + kx + ak
 \end{aligned}$$

Berdasarkan semua suku banyak ,sehingga

Dari koefisien x^3 kita peroleh $a = k$

Dari koefisien x^2 kita peroleh $ak = 1$, maka $a^2 = 1$ atau $a = \pm 1$

Dari koefisien x kita peroleh $b = k$.

$$\text{Untuk } a = 1 \text{ dan } b = 1, \text{ nilai } ab = 1$$

$$\text{Untuk } a = -1 \text{ dan } b = -1, \text{ nilai } ab = 1$$

4. Jika $\sin 18^\circ = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, maka nilai $a + b + c$ adalah....

Pembahasan :

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin 36^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ)$$

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$$

$$\sin 36^\circ = \cos(36^\circ - 18^\circ)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin 36^\circ = \cos 36^\circ \cos 18^\circ - \sin 36^\circ \sin 18^\circ$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2$$

$$\sin (2.18^\circ) = \cos 2.18^\circ \cos 18^\circ - \sin 2.18^\circ \sin 18^\circ$$

$$2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = (1 - 2\sin^2 18^\circ) \cos 18^\circ - 2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \sin 18^\circ$$

$$2 \sin 18^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ$$

$$2 \sin 18^\circ = 1 - 4 \sin^2 18^\circ$$

$$4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$$

Misal :

$\sin 18^\circ = x$, maka :

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Sehingga didapatkan $a = -1$, $b = 5$, dan $c = 4 \rightarrow a + b + c = -1 + 5 + 4 = 8$

5. Ubaid membeli 2 penghapus, 4 buku, dan 1 bolpoin di Toko Hikmah dengan harga total Rp 12.000,00. Ia membeli lagi 3 penghapus, 15 buku, dan 4 bolpoin di Toko yang sama dengan harga total Rp 30.000,00. Misalkan y adalah selisih banyak ayat dalam surah At - Takwiir dan surah Al - Infithaar; z adalah setengah dari banyak kitab suci yang diturunkan oleh Allah SWT. Jika Ubaid ingin membeli y penghapus dan z buku di Toko tersebut, maka biaya total yang harus dibayar oleh Ubaid adalah

Pembahasan :

Misalkan : Penghapus = a

Buku = b

Bolpoin = c

Diketahui :

Surah At – Takwiir memiliki jumlah ayat yaitu 29 ayat dan Surah Al – Infithaar memiliki jumlah ayat yaitu 19 ayat. Maka $y = 29 - 19 = 10$. Kemudian $z = 2$.

Ditanya : $ya + zb = 10a + 2b$

Jawab :

$2a + 4b + c = 12.000$	x4	$8a + 16b + 4c = 48.000$	
$3a + 15b + 4c = 30.000$	x1	$3a + 15b + 4c = 30.000$	-
		$5a + b$	$= 18.000$

Maka,

$$ya + zb = 10a + 2b$$

$$\begin{aligned}
2(5a + b) &= 10a + 2b \\
&= 2 \times 18.000 \\
&= 36.000
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh total biaya yang harus dibayar oleh Ubaid jika ia ingin membeli y penghapus dan z buku di toko tersebut ialah Rp. 36.000.

6. Jika sisa pembagian $x^{2021} + x^{1011} + x^{506} + x^{253} + x^{127}$ oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$, maka nilai dari $4A + 5B$ adalah ...

Pembahasan :

Misalkan $x = 1$ maka $A + B = 5$

$$x = -1 \text{ maka } -A + B = -3$$

Lakukan eliminasi pada persamaan 1 dan 2

$$\begin{array}{r}
A+B=5 \\
-A+B=-3 \\
\hline
2B=2 \\
B=1
\end{array}$$

Substitusikan menghasilkan $-A + B = -3$

$$-A + 1 = -3$$

$$-A = -3 - 1$$

$$A = 4$$

$$\text{Jadi, } 4A + 5B = 4(4) + 5(1) = 21$$

7. Berapa banyaknya penyelesaian bilangan bulat tak negatif dari $X_1 + X_2 + \dots + X_8 = 10$. Jika $X_i \geq 0$ untuk $1 \leq i \leq 7$ dan $X_8 > 0$.

Pembahasan :

Diketahui : $n = 8$

$$r = 10 - 1 = 9$$

$$C \binom{n+r-1}{r} = C \binom{8+9-1}{9} = C \binom{16}{9} = 880$$

8. Diberikan jajargenjang ABCD, dengan sudut $ABC = 105^\circ$. Titik M berada didalam jajargenjang sehingga segitiga BMC sama sisi dan sudut $CMD = 135^\circ$. Jika K adalah pertengahan sisi AB, maka besarnya sudut BKC adalah...

Pembahasan :

Misal $BC = a$

Pada segitiga DMC, berlaku :

$$\frac{MC}{\sin D} = \frac{DC}{\sin M}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{DC}{\sin 135^\circ}$$

$$DC = a\sqrt{2}$$

$$KB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

Pada segitiga KBC, berlaku:

$$KC^2 = KB^2 + BC^2 - 2KB \cdot BC \cos B$$

$$KC^2 = \frac{1}{2}a^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

$$KC^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$KC^2 = a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} \rightarrow KC = \sqrt{\frac{a^2}{4}(4 + 2\sqrt{3})}$$

Juga berlaku :

$$\begin{aligned} \cos K &= \frac{KC^2 + KB^2 - BC^2}{2KC \cdot KB} \\ \cos K &= \frac{a^2 + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2}} \\ \cos K &= \frac{\frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1)}{\frac{1}{2}a(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \cos K &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ K &= 45^\circ \end{aligned}$$

Jadi, besar sudut $BKC = 45$

9. Tentukan banyak bilangan 5 digit 743ab habis dibagi 5 dan 9 ...

Pembahasan :

- ❖ bilangan yang habis dibagi 5 dengan syarat angka terakhir 0/5
- ❖ bilangan yang habis dibagi 9 dengan syarat kelipatan 9

Terdapat 2 kemungkinan nilai b

1) $b = 0$

$$743a0$$

$$14 + 4 = 9k$$

$$a = 4 \rightarrow 14 + 4 = 9 \cdot 2$$

$$18 = 18$$

$$74340$$

2) $b = 5$

$$743a5$$

$$19 + a = 9k$$

$$a = 8 \rightarrow 19 + 8 = 9 \cdot 3$$

$$74385$$

Berdasarkan kemungkinan diatas diperoleh bahwa banyak bilangan 5 digit yang habis dibagi 5 dan 9 ada 2 yaitu 74340 dan 74385.

10. Akbar mempunyai celengan yang berisi beberapa koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara pengambilan 12 koin dari celengan tersebut?

Pembahasan :

Kasus ini adalah kasus kombinasi dengan pengulangan (karena koin tertentu dapat diambil lebih dari sekali). Di sini $n= 4$ dan $r = 12$, berarti banyak cara yang di maksud adalah $C(4+12-1, 12) = C(15, 12)$ atau 455 cara.

11. Misalkan a^2, a^3, \dots, a^n suatu bilangan real positif yang memenuhi $a^2 \cdot a^3 \dots a^n = 1$. Buktikan bahwa $(a^2+1)^2 \cdot (a^3+1)^3 \dots (a^n+1)^n > n^n$

Pembahasan :

Pertidaksamaan antara aritmatika dan geometri menyiratkan

$$(a_k + 1)^k = \left(a_k + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-1} \right)^k \geq k^k \cdot a_k \cdot \frac{1}{(k-1)^{k-1}}$$

$$= \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \cdot a_k$$

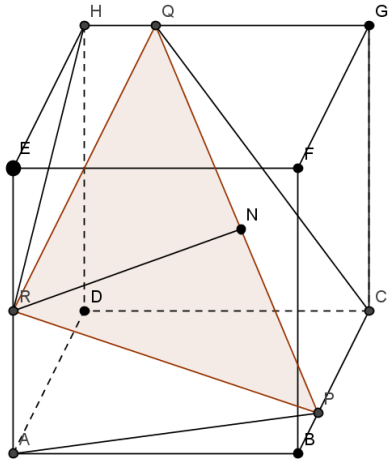
Pertidaksamaan ketat kecuali $a_k = \frac{1}{k-1}$ mengalikan pertidaksamaan analogi untuk $k = 2, 3, \dots, n$ menghasilkan

$$(a_2 + 1)^2 \cdot (a_3 + 1)^3 \dots (a_n + n)^n > \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \frac{4^4}{3^3} \dots \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot a_2 a_3 \dots a_n = n^n$$

Pertidaksamaan ketat karena setidaknya salah satu dari a_2, \dots, a_n harus lebih besar dari atau sama dari 1 dan dengan demikian $a_k > \frac{1}{k-1}$ berlaku untuk setidaknya satu bilangan bulat $k \in \{2, \dots, n\}$

12. Diketahui kubus ABCD.EFGH mempunyai sisi 6 cm. titik P pada BC sehingga PB= 2cm titik Q pada GH sehingga HQ= 2cm, R titik tengah AE. Jarak R ke PQ adalah....

Pembahasan :



$$\triangle ABP, \quad AP = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

$$\triangle APR, \quad PR = \sqrt{3^2 + (\sqrt{40})^2} = \sqrt{9 + 40} = \sqrt{49} = 7$$

$$PR = RQ = 7$$

$$\triangle CGQ, \quad CQ = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{42}$$

$$\triangle CPQ, \quad PQ = \sqrt{4^2 + (\sqrt{42})^2} = \sqrt{16 + 42} = \sqrt{58}$$

Segitiga PQR sama kaki sehingga panjang $QN = NP = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{58}$

Panjang garis RN

$$\begin{aligned} \triangle PNR, \quad RN &= \sqrt{PR^2 + PN^2} \\ &= \sqrt{7^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{58}\right)^2} \\ &= \sqrt{49 - \frac{58}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{138}{4}} \\ &= \sqrt{34,5} \end{aligned}$$

13. Seorang anak lupa dengan PIN yang ada pada handphonenya. Anak tersebut hanya mengingat bahwa angka yang digunakan antara 2 sampai 9. Apabila PIN handphone tersebut terdiri dari 5 angka, ada berapa cara percobaan untuk memasukkan PIN dari handphone anak tersebut?

Pembahasan :

Diketahui : $n = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = 8$

$$r = 5$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6.720 \text{ cara.}$$

14. Banyak faktor dari 8400 yang merupakan bilangan ganjil positif adalah ...

Pembahasan :

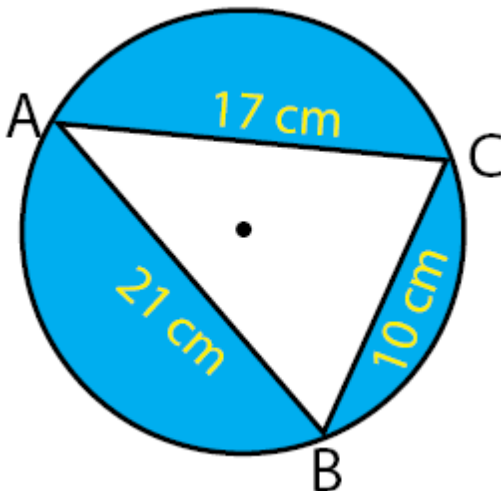
$$\begin{aligned} 8400 &= 84 \cdot 100 \\ &= 4 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 25 \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \\ &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Karena yang ditanya adalah faktor bilangan ganjil positif maka yang diberi warna kuning merupakan faktor bilangan ganjil positif sehingga faktor bilangan ganjil positif dari 8400 adalah $(n + 1)$ sehingga diperoleh,

$$(1 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$$

$$(2) \times (3) \times (2) = 12$$

15. Perhatikan gambar dibawah ini!



Luas lingkaran diatas adalah...

Pembahasan :

Untuk menentukan luas lingkaran tersebut perlu mencari beberapa hal, yaitu:

- Menentukan keliling segitiga ABC

$$K = AB + BC + CA$$

$$K = 21 + 10 + 17 = 48 \text{ cm}$$

- Menghitung nilai s

$$s = \frac{1}{2} \times K$$

$$s = \frac{1}{2} \times 48$$

$$s = 24 \text{ cm}$$

Karena segitiga didalam lingkaran merupakan segitiga tidak beraturan, maka luas diperoleh dengan cara:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$$

$$L = \sqrt{24(14)(7)(3)}$$

$$L = \sqrt{7056}$$

$$L = 84 \text{ cm}^2$$

- Menentukan r

$$r = \frac{10 \times 17 \times 21}{4 \times 84}$$

$$r = \frac{3570}{336}$$

$$r = 10 \frac{5}{8} \text{ cm}$$

Sehingga dapat ditentukan luas lingkaran tersebut adalah

$$L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2$$

$$L_{\text{lingkaran}} = \frac{22}{7} \times 10 \frac{5}{8} \times 10 \frac{5}{8}$$

$$L_{\text{lingkaran}} = 101 \frac{51}{224} \text{ cm}^2$$

Jadi, luas lingkaran tersebut adalah $101 \frac{51}{224} \text{ cm}^2$

16. Banyak faktor dari 5.600 yang merupakan bilangan ganjil positif adalah ...

Pembahasan :

$$5600 = 56.100$$

$$= 4.14.4.25$$

$$= 2^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$$

$$= 2^5 \cdot 7 \cdot 5^2$$

Karena yang ditanya adalah faktor bilangan ganjil positif maka yang diberi warna kuning merupakan faktor bilangan ganjil positif sehingga faktor bilangan ganjil positif dari 5.600 adalah $(n + 1)$ sehingga diperoleh,

$$(1 + 1) \times (2 + 1)$$

$$(2) \times (3) = 6$$

17. Sekitar 250 SM, pi (π) pertama kali dihitung oleh matematikawan yang berasal dari Syracuse. Dia menggunakan teorema Pythagoras untuk menentukan luas dua poligon, yaitu poligon yang ada didalam lingkaran dan poligon yang dibatasi oleh lingkaran. Dari hasil perhitungannya, beliau menemukan nilai pi yaitu 3,14. Pertanyaannya adalah siapa nama matematikawan yang menemukan pi?

Jawab : **Archimedes**

18. Astronomi merupakan ilmu yang mengkaji tentang bintang-bintang termasuk kedudukan, pergerakan, dan penafsiran yang berkaitan dengan bintang. Guna menghitung kedudukan bintang terhadap bumi yang membutuhkan perhitungan geometri. Siapakah yang memperkenalkan konsep geometri dalam matematika?

Jawab : **Al- Khawarizmi**

19. Sebuah operasi yang menghasilkan sisa pembagian dari suatu bilangan terhadap bilangan lainnya dinamakan ...

Jawab : **Modulo**

20. Sebuah persamaan suku banyak dimana variabel – variabel yang terlibat didefinisikan atas bilangan bulat dinamakan ...

Jawab : **Persamaan Diophantine**